ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ

ಭಾಗ–2

ಎಚ್ ಎಸ್ ಕೃಷ್ಣಸ್ವಾಮಿ
ಎಮ್ ಆರ್ ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿ
ಎಚ್ ಎಸ್ ಶಿವಕುಮಾರ್

1977
ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ
ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು-24

ಪ್ರಕಟಣೆ 54

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ

(ಭಾಗ 2)

(ರೇಖಾಗಣಿತ, ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ, ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ)

ಎಚ್. ಎಸ್. ಕೃಷ್ಣಸ್ವಾಮಿ
ಎಮ್. ಆರ್. ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿ
ಎಚ್. ಎಸ್. ಶಿವಕುಮಾರ್

1977

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ
ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು–560024

ಮುನ್ನುಡಿ

ಇಂದಿನ ವಿಶ್ವದಲ್ಲಿನ ನಾಗಾಲೋಟದ ಜನಸಂಖ್ಯೆ ತಂದೊಡ್ಡಿದ ಹಲವಾರು ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಕೃಷಿ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಹೆಚ್ಚಳವೇ ಬಹುಮಟ್ಟಿಗೆ ಪರಿಹಾರ ಒದಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಕೃಷಿ ಉತ್ಪಾದನೆಯ ಹೆಚ್ಚಳವು ಕೃಷಿ ಸಂಶೋಧನೆಗಳ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನಳವಡಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆ. ಕಳೆದ ಒಂದು ದಶಕದಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ ಸಂಶೋಧನೆಯು ನಾನಾಮುಖವಾಗಿ ಬೆಳೆದಿದೆ. ಅದರ ಪ್ರಯೋಜನವನ್ನು ಕೆಲವು ರೈತರು ಪಡೆದಿದ್ದಾರೆ. ಅವರಲ್ಲಿ ಕೆಲವರು ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಗತಿಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಜಾಗತಿಕ ಗರಿಷ್ಠ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆಂಬ ಭರವಸೆಯ ದೃಷ್ಟಾಂತವೆನಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಈ ಅಳವಡಿಕೆ ಹಾಗೂ ಸಾಧನೆಗಳು ಕೆಲವರ ಸ್ವತ್ತಾಗಿ ಉಳಿಯದೆ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕವಾಗಬೇಕು. ಆಗ ರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿ ನಿಜವಾದ ಕೃಷಿ ಪ್ರಗತಿ ಹಾಗೂ ಸಾಮಾಜಿಕ ಕಲ್ಯಾಣ ಮೂಡಿಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಕಾರ್ಯಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಕೃಷಿವಿಜ್ಞಾನ ಸಾಹಿತ್ಯ ರಚನೆಯು ಮಹತ್ವದ ಅಂಶವಾಗಿದೆ. ಈ ದೃಷ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೃಷಿವಿಜ್ಞಾನ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾಗುತ್ತಿರುವುದು ಔಚಿತ್ಯಪೂರ್ಣವಾಗಿದೆ.

ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯಾನಂತರದ ಅಭ್ಯುದಯದ ಹಲವಾರು ಯತ್ನಗಳಲ್ಲಿ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಭಾಷೆಗಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯೂ ಒಂದು. ಹಿಂದೀ ಭಾಷೆಯೊಂದಿಗೇನೆ ಇತರ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳ ಬೆಳವಣಿಗೆ ನಡೆಯಬೇಕೆಂದು ಸಂಸತ್ತು ನಿರ್ಧರಿಸಿದೆ. ಹಲವಾರು ಭಾಷೆಗಳು ಬಳಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ನಮ್ಮ ರಾಷ್ಟ್ರದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲ ಭಾಷೆಗಳೂ ಸಮತೂಕವಾಗಿ ಬೆಳೆದು ಬಂದಾಗಲೇ ರಾಷ್ಟ್ರದ ಸಮಗ್ರತೆ ಬೆಳೆದುಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಭಾಷೆಗಳು ಸಾಕಷ್ಟು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿದಾಗ ಶಿಕ್ಷಣಮಾಧ್ಯಮಗಳಾಗಲು ಸಮರ್ಥವಾಗುತ್ತವೆ. ನಾಡಿನ ಭಾಷೆಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಶಿಕ್ಷಣಮಾಧ್ಯಮಗಳಾಗುವಂತೆ ಬಲಗೊಳಿಸುವ ಹೊಣೆ ವಿವಿಧ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳದ್ದು. ಅದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳು ಕೃಷಿ ಶಿಕ್ಷಣಮಾಧ್ಯಮಗಳಾಗುವಂತೆ ಸಿದ್ಧತೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದ್ದು ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳ ಕೆಲಸವಾಗಿದೆ. ನಮ್ಮ ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ಈ ಕಾರ್ಯಸಾಧನೆಗೋಸುಗ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ ಸಾಹಿತ್ಯ ನಿರ್ಮಾಣ ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಂಡಿದೆ. ಇಷ್ಟು ದಿನ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿಯೇ ಶಿಕ್ಷಣ ಪಡೆದು, ಬಳಿಕ ನಡೆಸಿದ ಶಿಕ್ಷಕ ಹಾಗೂ ವಿಜ್ಞಾನಿಗಳಿಗೆ ಒಮ್ಮೆಲೇ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಗ್ರಂಥರಚನೆ ಮಾಡುವುದು ಸುಲಭ ಕಾರ್ಯವೇನಲ್ಲ. ಇಂಥದರಲ್ಲಿ ಈ ಕೆಲಸ ಪ್ರಾರಂಭವಾದ ಅಲ್ಪಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಕಾಲುಶತ ಗ್ರಂಥಗಳು ಪ್ರಕಟಗೊಂಡು ಜನಪ್ರಿಯವಾದುದು ಅತ್ಯಂತ ಹೆಮ್ಮೆಯ ಸಾಧನೆಯೇ ಸರಿ ! ಈ ಕೆಲಸ ಭರದಿಂದ ನಡೆದಷ್ಟು ಕೃಷಿ ಮುನ್ನಡೆಯು ತ್ವರಿತವಾಗಿ ನಡೆಯುವುದು.

ಉಪಯುಕ್ತ ಸಂಶೋಧನಾಧಾರಿತ ಆಳ ಅಭ್ಯಾಸದ ಫಲವಾಗಿ ಸೃಷ್ಟಿಗೊಂಡ ಕೃಷಿವಿಜ್ಞಾನ ಗ್ರಂಥಗಳು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದ ಕೃಷಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಹಾಗೂ ಕೃಷಿಕರಿಗೆ ಅಮೂಲ್ಯ ಕೊಡುಗೆಗಳಾಗುವುದರಲ್ಲಿ ಸಂದೇಹವಿಲ್ಲ. ಈ ಕಾರ್ಯ ಮಿಂಚಿನ ವೇಗದಿಂದ ನಡೆಯಲೆಂದು ನಾನು ಹಾರೈಸುತ್ತೇನೆ.

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು
ದಿನಾಂಕ 15-2-1977

ಹ. ರಾ. ಅರಕೇರಿ
ಉಪಕುಲಪತಿಗಳು

ಲೇಖಕರ ನುಡಿ

ಕೃಷಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಬರೆಯಲಾದ ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ರೇಖಾಗಣಿತ, ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ, ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಷಯಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅರ್ಥವಾಗುವಂತೆ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಸೋದಾಹರಣವಾಗಿ ವಿವರಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕೃಷಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆಂದೇ ಬರೆದಿದ್ದರೂ ಸಹ ಇದು ಈ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಹೊಸದಾಗಿ ಕಲಿಯುವವರಿಗೂ ನೆರವಾಗುತ್ತದೆಂದು ನಂಬಿದ್ದೇವೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಬರೆಯುವಾಗ ನಮ್ಮನ್ನು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಿದ ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ಕನ್ನಡ ವಿಭಾಗದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕ ಹಾಗೂ ಸಹಾಯಕ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರುಗಳಾದ ಶ್ರೀ ವೀ. ಚ. ಹಿತ್ತಲಮನಿ ಹಾಗೂ ಶ್ರೀ ಎಚ್. ಕೆ. ನರಸಿಂಹೇಗೌಡ, ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪುಸ್ತಕದ ನಿರ್ಮಾಣ ಸಮಿತಿಯ ಅಧ್ಯಕ್ಷರಾದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕ ಶ್ರೀ ಪಿ. ಸಿ. ಶ್ರೀಧರನ್ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಮೂಲ ವಿಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಮಾನವಿಕ ಶಾಸ್ತ್ರ ಶಿಕ್ಷಣ ನಿರ್ದೇಶಕರಾದ ಡಾ. ನಾರಾಯಣ್ ಇವರೆಲ್ಲರಿಗೂ ನಮ್ಮ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳು. ಇದೇ ರೀತಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿಯೂ ಪರೋಕ್ಷವಾಗಿಯೂ ನಮಗೆ ನೆರವಾದವರೆಲ್ಲರಿಗೂ ನಾವು ಕೃತಜ್ಞರಾಗಿದ್ದೇವೆ.

ಎಚ್. ಎಸ್. ಕೃಷ್ಣಸ್ವಾಮಿ,
ಎಮ್. ಆರ್. ಕೃಷ್ಣಮೂರ್ತಿ,
ಎಚ್. ಎಸ್. ಶಿವಕುಮಾರ್

ಪರಿವಿಡಿ

ರೇಖಾಗಣಿತ

ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ

ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ

ರೇಖಾಗಣಿತ

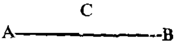
ಅಧ್ಯಾಯ 1

ರೇಖೆಯ ಖಂಡಗಳು ಮತ್ತು ವೃತ್ತಗಳು

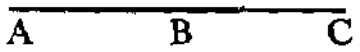
ರೇಖೆಯ ಖಂಡಗಳು

ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಆ ರೇಖೆಯ **ಖಂಡ** (Segment) ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, AB ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ ಆಗ ಉಂಟಾಗುವ ಭಾಗಗಳಾದ AC ಮತ್ತು CB ಗಳನ್ನು AB ರೇಖೆಯ ಖಂಡಗಳೆಂದು ಕರೆಯಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 1). ಇಲ್ಲಿ C ಬಿಂದುವು A ಮತ್ತು *B* ಗಳ ನಡುವೆ ಇದೆ. ಅಂದರೆ AB ರೇಖೆಯು ಒಳಗೆ ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ, ಚಿತ್ರ 2 ರಲ್ಲಿ AB ರೇಖೆಯು ಹೊರಗೆ ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ, C ಬಿಂದು ವೃದ್ಧಿಸಿದ AB ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇದೆ. AC ಮತ್ತು CB ಗಳ ಮೊತ್ತವು (ತಕ್ಕ ಚಿಹ್ನೆಗಳೊಡನೆ ಕೂಡಿದಾಗ) AB ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 1

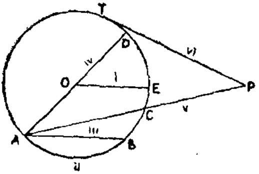


ಚಿತ್ರ 2

ಚಿತ್ರ (1) ರಲ್ಲಿ AC ಮತ್ತು CB ಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಹಾಗೂ ಚಿತ್ರ (2) ರಲ್ಲಿ AC ಯ ಚಿಹ್ನೆ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದ್ದು, CB ಚಿಹ್ನೆ ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ವೃತ್ತಗಳು

ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನಿಶ್ಚಿತ ದೂರದಲ್ಲಿಯೇ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ



ಚಿತ್ರ 3

ಪಥವು ಒಂದು ವೃತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವನ್ನು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ

ವೆಂದೂ, ನಿಶ್ಚಿತ ದೂರವನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಉಳಿದೆಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ (3) ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ.

ಚಿತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ ಕೆಳಕಂಡ ಅಂಶಗಳು ವೇದ್ಯವಾಗುತ್ತವೆ.

(i) ತ್ರಿಜ್ಯ (ಮೊದಲೇ ತಿಳಿಸಿದೆ).

(ii) ಕಂಸ → ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ವಕ್ರರೇಖೆ.

(iii) ಜ್ಯಾ → ವೃತ್ತ ಪರಧಿಯ ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆ.

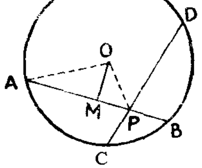
(iv) ವ್ಯಾಸ → ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಜ್ಯಾ. (ವ್ಯಾಸ = 2 ಪಟ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯ).

(v) ಛೇದಕ → ವೃತ್ತದ ಹೊರಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಅದನ್ನು ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವಂತೆ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆ.

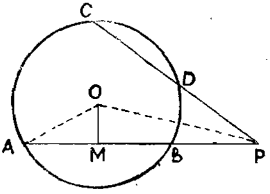
(vi) ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ → ವೃತ್ತದ ಹೊರಬಿಂದುವಿನಿಂದ, ಅದನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆ. ಅಥವಾ, ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವ ಛೇದಕ.

ಪ್ರಮೇಯ 1

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳು ಪರಸ್ಪರ (ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ) ಛೇದಿಸಿದರೆ ಆಗ ಒಂದು ಜ್ಯಾದ ಖಂಡಗಳಿಂದಾದ ಆಯವು ಮತ್ತೊಂದು ಜ್ಯಾದ ಖಂಡಗಳಿಂದಾದ ಆಯಕ್ಕೆ ಸಮ.



ಚಿತ್ರ 4



ಚಿತ್ರ 5

ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಪರಸ್ಪರ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಖಂಡಗಳಿಂದಾದ ಆಯವು ಮತ್ತೊಂದರ ಖಂಡಗಳಿಂದಾದ ಆಯಕ್ಕೆ ಸಮವಿದ್ದರೆ ಆ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ತುದಿಗಳು ಒಂದೇ ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ: O ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಜ್ಯಾಗಳು ಒಳಗೆ (ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ) ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ (ಚಿತ್ರ 4, 5).

ಸಾಧನೀಯ: $AP \cdot PB = CP \cdot PD$

ರಚನೆ: OM ರೇಖೆಯನ್ನು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. OA ಮತ್ತು OP ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಸಾಧನೆ: OM ರೇಖೆಯು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ (ರಚನೆ)

$\therefore AM = MB$

ಚಿತ್ರ (4) ರಲ್ಲಿ,

$$AP \cdot PB = (AM + MP)(MB - MP)$$
$$= (AM + MP)(AM - MP) \qquad [\because AM = MB]$$
$$= AM^2 - MP^2$$
$$= (AM^2 + OM^2) - (MP^2 + OM^2)$$
$$= OA^2 - OP^2$$

$\therefore AP \cdot PB = OA^2 - OP^2$

ಚಿತ್ರ (5) ರಲ್ಲಿ,

$$AP \cdot PB = (MP + AM) \quad (MP - MB) = MP^2 - AM^2 \qquad [\because MB = AM]$$

$\therefore AP \cdot PB = OP^2 - OA^2$

ಇದೇ ರೀತಿ, (4) ನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ $CP \cdot PD = OA^2 - OP^2$ ಎಂದೂ,

(5) ನೆಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, $CP \cdot PD = OP^2 - OA^2$ ಎಂದೂ,

ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಆದುದರಿಂದ, $AP \cdot PB = CP \cdot PD$.

ವಿಲೋಮ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅಸಂಗತ ಪ್ರದರ್ಶನ ಕ್ರಮ (Reductio-ad-absurdum) ವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸೋಣ.

ದತ್ತ: $AP \cdot PB = CP \cdot PD$ ಚಿತ್ರ (4) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೆ.

ಸಾಧನೀಯ: A, B, C, D ಸಂವೃತ್ತ ಬಿಂದುಗಳು (Concyclic).

ರಚನೆ: A, B, C, D ಸಂವೃತ್ತ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರದಿದ್ದರೆ, A, B, C ಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತವನ್ನು CD (ಅಥವಾ ವೃದ್ಧಿಸಿದ CD) ರೇಖೆಯು E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.

ಸಾಧನೆ : P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ AB ಮತ್ತು CE ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾಗಳು.

ಆದುದರಿಂದ $AB \cdot PB = CP \cdot PE$ (ಹಿಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ)

ಆದರೆ, $AP \cdot PB = CP \cdot PD$ (ದತ್ತ)

$\therefore CP \cdot PE = CP \cdot PD \quad \therefore PE = PD$

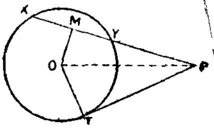
ಇದು D ಬಿಂದುವು E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ.

$\therefore$ A, B, C, D ಸಂವೃತ್ತ ಬಿಂದುಗಳು.

ಪ್ರಮೇಯ 2

ಒಂದು ಹೊರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಛೇದಕವನ್ನು ಮತ್ತು ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಆಗ ಛೇದಕ ಮತ್ತು ವೃತ್ತ ಬಾಹ್ಯವಾದ ಅದರ ಖಂಡ ದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಆಯವು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮ.

ದತ್ತ : O ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, P ಎಂಬ ಹೊರಬಿಂದುವಿನಿಂದ PYX ಎಂಬ ಛೇದಕವನ್ನೂ ಮತ್ತು PT ಎಂಬ ಸ್ಪರ್ಶ ರೇಖೆಯನ್ನೂ ಎಳೆದಿದೆ (ಚಿತ್ರ 6).



ಚಿತ್ರ 6

ಸಾಧನೀಯ : $PX \cdot PY = PT^2$

ರಚನೆ : OM ರೇಖೆಯನ್ನು XP ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. OP, OT ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $\underline{|OTP} = 90°$ ($\because$ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತವೆ).

ಸಾಧನೆ : O ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಎಳೆದ OM ರೇಖೆಯು XY ಜ್ಯಾಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.

$\therefore$ ಅದು XY ಜ್ಯಾವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $XM = MY$.

ಈಗ $XP \cdot PY = (XM + MP)(MP - MY)$

$= (MP + XM)(MP - XM) \quad [\because MY = XM]$

$= MP^2 - XM^2$

$= (MP^2 + OM^2) - (XM^2 + OM^2)$

$= OP^2 - OX^2$

$= OP^2 - OT^2$ [$\because$ OX = OT = ತ್ರಿಜ್ಯ]

$= PT^2$

$\therefore$ $XP \cdot PY = PT^2$ ಅಥವಾ $PX \cdot PY = PT^2$.

ವಿಲೋಮ ಪ್ರಮೇಯ:

ಒಂದು ಹೊರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಛೇದಕ ಮತ್ತು ವೃತ್ತ ಬಾಹ್ಯವಾದ ಅದರ ಖಂಡದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಆಯವು ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಂಧಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ ಆಗ ಆ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ: P ಎಂಬ ಹೊರಬಿಂದುವಿನಿಂದ PYX ಎಂಬ ಛೇದಕವನ್ನೂ ಮತ್ತು ವೃತ್ತ ಪರಧಿಯನ್ನು T ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುವಂತೆ PT ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ ಹಾಗೂ $PX \cdot PY = PT^2$ (ಚಿತ್ರ *6* ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ).

ಸಾಧನೀಯ: PT ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ.

ಸಾಧನೆ: ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದು R ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ PT ರೇಖೆಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿರಿ.

ಆಗ ಜ್ಯಾಗಳಾದ XY ಮತ್ತು RT ಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ (ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ)

$\therefore$ $PX \cdot PY = PR \cdot PT$ (ಪ್ರಮೇಯ 1)

ಆದರೆ, $PX \cdot PY = PT^2$ (ದತ್ತ)

$\therefore$ $PR \cdot PT = PT^2$ $\therefore$ PR = PT ಇದು, R ಬಿಂದುವು T ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ. ಅಂದರೆ, PT ರೇಖೆಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ಅದು ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1 (*a*)

(1) ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳು P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಕತ್ತರಿಸುತ್ತವೆ. RS ಎಂಬುದು ಆ ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ. PQ ವನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದರೆ ಅದು RS ನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(2) ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಜ್ಯಾದ ಮೇಲೆ M ಎಂಬುದು ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದು. M ಮೂಲಕ ಮೊದಲನೆಯ

ವೃತ್ತಕ್ಕೆ LN ಎಂಬ ಜ್ಯಾವನ್ನೂ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ PQ ಎಂಬ ಜ್ಯಾವನ್ನೂ ಎಳೆದಿದೆ. $LM.MN = PM.MQ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(3) AB ವ್ಯಾಸದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿದೆ. P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಕತ್ತರಿಸುವಂತೆ AC ಮತ್ತು BD ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ.

$$AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿಯಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಪರಿಧಿಯಲ್ಲಾಗಲೀ ಸಮವಾದ ಕೋನಗಳನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಜ್ಯಾಗಳು ಆ ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯಾಸಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(5) P ಎಂಬ ಒಂದು ಹೊರಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ PLM ಛೇದಕವನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ PR ರೇಖೆಯನ್ನು AB ವ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದಿದೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ,

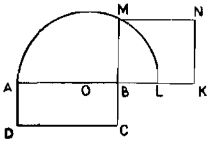
$$PR^2 = PL \cdot PM - AR \cdot RB$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ರಚನೆ 1

ಆಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಒಂದು ವರ್ಗವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಕ್ರಮ

ದತ್ತ: ABCD ಒಂದು ಆಯ (Rectangle)

ಕರ್ತವ್ಯ: ABCD ಗೆ ಸಮನಾದ ಒಂದು ವರ್ಗವನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.



ಚಿತ್ರ 7

ರಚನೆ: BC = BL ಇರುವಂತೆ AB ಯನ್ನು L ಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7), AL ವ್ಯಾಸದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಈ ಅರ್ಧ ವೃತ್ತವನ್ನು M ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ CB ರೇಖೆಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿ. BM ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ BMNK ವರ್ಗವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿ. ಆಗ BKNM ವರ್ಗವು ABCD ಆಯಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : O. AL ರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$$AB \cdot BC = AB \cdot BL \quad (\because\ BC = BL)$$
$$= (AO + OB)(OL - OB)$$
$$= (AO + OB)(AO - OB) \quad [\because\ OL = AO]$$
$$= AO^2 - OB^2$$
$$= OM^2 - OB^2 \quad (\because\ OA = OM = \text{ತ್ರಿಜ್ಯ})$$
$$= MB^2 = MBKN \text{ ವರ್ಗ}.$$

$\therefore$ $AB \cdot BC$ ಆಯ $=$ MBKN ವರ್ಗ

ರಚನೆ 2

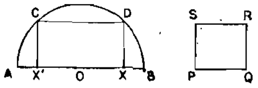
ಎರಡು ಖಂಡಗಳಿಂದುಂಟಾದ ಆಯವು ಒಂದು ವರ್ಗಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ಕ್ರಮ

ದತ್ತ : AB ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ. PQRS ಒಂದು ವರ್ಗ [ಚಿತ್ರ 8 (i) (ii)].

ಕರ್ತವ್ಯ : ಆಯ $AX.XB =$ ವರ್ಗ $PQRS$ ಇರುವಂತೆ AB ಯನ್ನು X ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಬೇಕು.

(a) ಆಂತರಿಕ ವಿಭಜನೆ :

ರಚನೆ : AB ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ AB ಗೆ PQ ನಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿ CD ಎಂಬ ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು ಅರ್ಧ ವೃತ್ತವನ್ನು C ಮತ್ತು D ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಈಗ,



(i) (ii)

ಚಿತ್ರ 8

D ಬಿಂದುವಿನಿಂದ DX ರೇಖೆಯನ್ನು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು AB ಯನ್ನು X ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. [ಚಿತ್ರ 8 (i)]. AX ಮತ್ತು XB ಗಳೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಖಂಡಗಳು.

ಸಾಧನೆ : O, AB ರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$$AX \cdot XB = (AO + OX)(AO - OX) \quad (\because OB = OA)$$

$$AO^2 - OX^2$$

$$= OD^2 - OX^2 \quad (\because AO = OD = \text{ತ್ರಿಜ್ಯ})$$

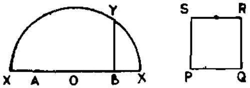
$$= DX^2$$

$$PQ^2 = \text{ವರ್ಗ } PQRS.$$

∴ AX·XB ಆಯ = PQRS ವರ್ಗ.

(*b*) ಬಾಹ್ಯ ವಿಭಜನೆ :

ರಚನೆ : BY = PQ ಇರುವಂತೆ B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ BY ರೇಖೆಯನ್ನು AB ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ, AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು O ವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು OY ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ವೃದ್ಧಿಸಿದ AB ರೇಖೆಯು



(i) (ii)

ಚಿತ್ರ 9

ಇದನ್ನು X ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. AX ಮತ್ತು BX ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಖಂಡಗಳು [ಚಿತ್ರ 9 (i), (ii)]. ವೃದ್ಧಿಸಿದ AB ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು X′ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕೂಡ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ **AX′ ಮತ್ತು X′B ಗಳುಕೂಡ ಅಭೀಷ್ಟ ಖಂಡಗಳು.**

ಸಾಧನೆ : $AX \cdot XB = (AO + OX)(OX - OB)$

$$= OX^2 - OB^2 \quad (\because OB = OA)$$

$$= OY^2 - OB^2 \quad (\because OX = OY = \text{ತ್ರಿಜ್ಯ})$$

$$= YB^2 = PQ^2 = \text{ವರ್ಗ } PQRS$$

∴ AX·XB ಆಯ = ವರ್ಗ PQRS.

ಅಭ್ಯಾಸ 1 (*b*)

(1) 3 ಅಂಗುಲ ಮತ್ತು 1.5 ಅಂಗುಲ ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಆಯವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇದಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ಸಲೆಯುಳ್ಳ ಒಂದು ವರ್ಗವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(2) 6 ಸೆಂಟಿಮೀಟರ್ ಮತ್ತು 2·8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಬಾಹುಗಳುಳ್ಳ ಆಯದ ಸಲೆಗೆ ಸಮನಾದ ಒಂದು ಚದುರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(3) AB = 7 ಸೆಂ.ಮೀ. BC = 3·4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ಆಯವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಇದರ ಸಲೆಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಚದುರವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(4) PQRS ಆಯವನ್ನು PQ = 3·6 ಅಂಗುಲ ಮತ್ತು QR = 2 ಅಂಗುಲ ಇರುವಂತೆ ರಚಿಸಿರಿ. ಇದರ ಸಲೆಗೆ ಸಮನಾದ ಒಂದು ವರ್ಗವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 2

ಪ್ರಮಾಣ ಮತ್ತು ಅನುಪಾತ

ಪ್ರಮಾಣ

ಒಂದೇ ಜಾತಿಯ ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮತ್ತೊಂದರ ಎಷ್ಟರಷ್ಟಿದೆ ಅಥವಾ ಎಷ್ಟು ಪಾಲು ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು **ಪ್ರಮಾಣ** ಅಥವಾ **ನಿಷ್ಪತ್ತಿ** (Ratio) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು **ರಾಶಿ ಸಂಬಂಧ** ಎಂದು ಕರೆಯುವುದೂ ಉಂಟು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 15 ಸೆಕೆಂಡುಗಳು ಮತ್ತು 5 ಸೆಕೆಂಡುಗಳು ಒಂದೇ ಜಾತಿಯವು (ಕಾಲ ಸೂಚಕಗಳು). ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯದು ಎರಡನೆಯದರ 3 ರಷ್ಟಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು 15 : 5 ಅಥವಾ 3 : 1 ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

ಅನುಪಾತ

ಎರಡು ವಸ್ತುಗಳ ಪ್ರಮಾಣವು ಮತ್ತೆರಡು ವಸ್ತುಗಳ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಆಗ ಆ ನಾಲ್ಕು ವಸ್ತುಗಳೂ ಒಂದು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $a : b = c : d$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಆಗ a, b, c, d ಗಳು ಒಂದು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಈ ಅನುಪಾತವನ್ನು $a : b : : c : d$ ಅಥವಾ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತಗಳಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.

ಪ್ರಮೇಯ 3

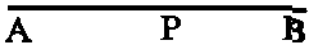
ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಅಥವಾ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು.

ದತ್ತ: AB ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ (ಚಿತ್ರ 10). ಮತ್ತು $m : n$ ಒಂದು ಪ್ರಮಾಣ.

ಸಾಧನೀಯ: AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಅಥವಾ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಬಹುದು.

ಸಾಧನೆ

(1) ಆಂತರಿಕ ವಿಭಜನೆ:



ಚಿತ್ರ 10

AB ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು $(m + n)$ ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ. ಅಂತಹ m ಸಮಭಾಗಗಳಿಗೆ ಸಮವಾದ AP ಯನ್ನು AB ಯಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿರಿ. ಆಗ n ಸಮಭಾಗ

ಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿ PB ಇರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, $AP : PB = m : n$ ಅಂದರೆ, P ಬಿಂದುವು AB ರೇಖೆಯನ್ನು $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಒಳಗೆ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. AB ರೇಖೆಯು $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಲು **ಅಸಂಗತ ಪ್ರದರ್ಶನ** ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸೋಣ (Reductio-ad-absurdum). ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೆ, $AP' : P'B = m : n$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದು P'AB ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರಲಿ.

ಆಗ, $AP : PB = AP' : P'B = m : n$ ($AP : PB = m : n$ ಎಂದು ಮೊದಲೇ ಸಾಧಿಸಿದೆ).

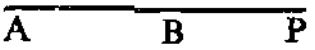
$$\therefore \frac{AP + PB}{PB} = \frac{AP' + P'B}{P'B}$$

$$\therefore \frac{AB}{PB} = \frac{AB}{P'B} \text{ ಅಂದರೆ, } PB = P'B.$$

ಇದು P′ ಬಿಂದುವು P ನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ. ಆದುದರಿಂದ AB ರೇಖೆಯನ್ನು $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಬಹುದು.

(2) ಬಾಹ್ಯ ವಿಭಜನೆ :

AB ರೇಖೆಯನ್ನು $(m - n)$ ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ ($m > n$ ಆಗಿರಲಿ) (ಚಿತ್ರ 11).



ಚಿತ್ರ 11

BP ಖಂಡವು ಅಂತಹ n ಸಮಭಾಗಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿರುವಂತೆ AB ಯನ್ನು P ಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿದರೆ, ಆಗ AP ಖಂಡವು ಅಂತಹ m ಸಮಭಾಗಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದುದರಿಂದ, $AP : BP = m : n$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, P ಬಿಂದುವು AB ರೇಖೆಯನ್ನು $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹೊರಗೆ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ. ಇದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ AB ರೇಖೆಯು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹೊರಗೆ ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಸಂಗತ ಪ್ರದರ್ಶನ ಕ್ರಮದಿಂದ ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದರೆ. $AP' : P'B = m : n$ ಇರುವಂತೆ P′ ಬಿಂದುವು AB ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರಲಿ. ಆದರೆ, $AP : PB = m : n$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, $AP : PB = AP' : P'B$ ಆಗಿರಬೇಕು.

$$\text{ಅಂದರೆ, } \frac{AP - BP}{BP} = \frac{AP' - BP'}{BP'}$$

$$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{AB}{BP'} \quad \therefore BP = BP'.$$

ಇದಂ, P' ಬಿಂದುವು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ. ಆದುದರಿಂದ AB ರೇಖೆಯು $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹೊರಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಈ ರೀತಿ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಅಥವಾ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ ಅವು ಒಂದು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

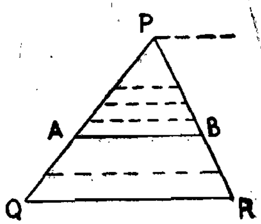
ಪ್ರಮೇಯ 4

ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆಯು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ : PQR ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AB ರೇಖೆಯು QR ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೂ ಅದು PQ ಮತ್ತು PR ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 12).

ಸಾಧನೀಯ: PA : AQ = PB : BR.

ರಚನೆ : A ಬಿಂದುವು PQ ರೇಖೆಯನ್ನು $m:n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.



ಚಿತ್ರ 12

PA ಖಂಡವನ್ನು m ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ. ಆಗ AQ ಖಂಡವು ಅಂತಹ n ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು PQ ರೇಖೆಯು ಅಂತಹ $(m+n)$ ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. P ಮೂಲಕವೂ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕವೂ QR ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇವೆಲ್ಲವೂ AB ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ : QR ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆಗಳು PQ ವನ್ನು $(m+n)$ ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ, ಅವು PR ರೇಖೆಯನ್ನೂ $(m+n)$ ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ. (ಸಮಾನಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ). ಅಂದರೆ, PB ಖಂಡದಲ್ಲಿ m ಸಮಭಾಗಗಳೂ, BR ಖಂಡದಲ್ಲಿ ಅಂತಹ n ಸಮಭಾಗಗಳೂ ಇರಬೇಕು.

$\therefore$ PB : BR = $m : n$

$\therefore$ PA : AQ = $m : n$ = PB : BR.

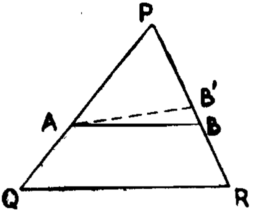
ವಿಲೋಮ ಪ್ರಮೇಯ :

ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯು ಮೂರನೆಯ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ : PQR ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ PA : AQ = PB : BR (ಚಿತ್ರ 13).

ಸಾಧನೀಯ : AB ರೇಖೆಯು QR ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅಸಂಗತ ಪ್ರದರ್ಶನ ಕ್ರಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ 13

AB ರೇಖೆಯು QR ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರದಿದ್ದರೆ, A ಮೂಲಕ ಎಳೆದ AB′ ರೇಖೆಯು QR ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರಲಿ, ಮತ್ತು ಅದು PR ಬಾಹುವನ್ನು B′ ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ, AB′ ರೇಖೆಯು PQ ಮತ್ತು PR ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $\frac{PA}{AQ} = \frac{PB'}{B'R}$ ಆದರೆ, $\frac{PA}{AQ} = \frac{PB}{BR}$ (ದತ್ತ)

$$\therefore \frac{PB}{BR} = \frac{PB'}{B'R}$$

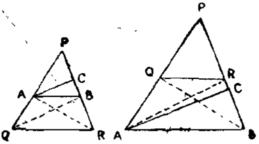
$$\therefore \frac{PB + BR}{BR} = \frac{PB' + B'R}{B'R}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{PR}{BR} = \frac{PR}{B'R}$ $\therefore$ BR = B′ R.

ಇದು B′ ಬಿಂದುವು B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ. ಆದುದರಿಂದ, AB ರೇಖೆಯು QR ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಪ್ರಮೇಯ 4 ನ್ನು ಸಾಧಿಸುವಾಗ, ಚಿತ್ರ 12 ರಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು PQ ಮತ್ತು PR ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ. ಅವು PQ ಮತ್ತು PR ಗಳನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗಲೂ ಪ್ರಮೇಯವು ಸತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೇ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

4 ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಾಧನೆ (ಮತ್ತೊಂದು ಕ್ರಮ)

AR, BQ ಸೇರಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 14 ಆಂತರಿಕ ವಿಭಜನೆ, ಚಿತ್ರ 15 ಬಾಹ್ಯ ವಿಭಜನೆ). QAB ಮತ್ತು RAB ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ಮತ್ತು AB, QR ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ನಿಂತಿವೆ. ಆದುದರಿಂದ, ಅವುಗಳ ಸಲೆಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, $\triangle QAB = \triangle RAB$.



ಚಿತ್ರ 14 ಚಿತ್ರ 15

A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PR ಬಾಹುವಿಗೆ AC ಎಂಬ ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಈಗ, $\triangle PAB = \frac{1}{2} PB \cdot AC$; $\triangle RAB = \frac{1}{2} BR \cdot AC$.

$$\therefore \quad \frac{\triangle PAB}{\triangle RAB} = \frac{\frac{1}{2} PB \cdot AC}{\frac{1}{2} BR \cdot AC} = \frac{PB}{BR}$$

ಅದೇ ರೀತಿ, $\dfrac{\triangle PAB}{\triangle QAB} = \dfrac{PA}{AQ}$

ಆದರೆ, $\triangle RAB = \triangle QAB$ (ಸಾಧಿಸಿದೆ)

$$\therefore \quad \frac{\triangle PAB}{\triangle RAB} = \frac{\triangle PAB}{\triangle QAB} \quad \therefore \frac{PB}{BR} = \frac{PA}{AQ}$$ ಅಥವ

$$PA : AQ = PB : BR.$$

ವಿಲೋಮವನ್ನು ಮೊದಲು ಸಾಧಿಸಿರುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಅಸಂಗತ ಪ್ರ ಕ್ರಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಅನುಮಿತ 1 : $PA : PQ = PB : PR$

ಸಾಧನೆ: $\dfrac{PA}{AQ} = \dfrac{PB}{BR}$ (ಸಾಧಿಸಿದೆ)

$$\therefore \frac{QA}{PA} = \frac{RB}{PB}$$

ಸಾಧನೆ: $\frac{QA+PA}{PA}=\frac{RB+PB}{PB}$ (ಯೋಗನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಕ್ರಿಯೆ)

$\therefore \frac{PQ}{PA}=\frac{PR}{PB}$ ಅಥವಾ PA : PQ = PB : PR.

ಅನುಮಿತ 2 : PQ : AQ = PR : BR.

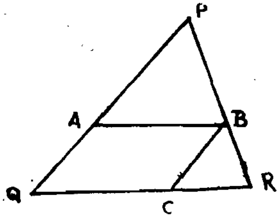
ಸಾಧನೆ: $\frac{PA}{AQ}=\frac{PB}{BR}$ (ಸಾಧಿಸಿದೆ).

ಅಂದರೆ, $\frac{PA+AQ}{AQ}=\frac{PB+BR}{BR}$ (ಯೋಗನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಕ್ರಿಯೆ)

$\therefore \frac{PQ}{AQ}=\frac{PR}{BR}$ ಅಥವಾ, PQ : AQ = PR : BR.

ಅನುಮಿತ 3 : PA : PQ = AB : QR

ಸಾಧನೆ: B ಬಿಂದುವಿನಿಂದ BC ರೇಖೆಯನ್ನು PQ ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು QR ನ್ನು C ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 16). AQCB ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ.



ಚಿತ್ರ 16

$\therefore$ AB = QC ಮತ್ತು AQ = BC.

ಅಂದರೆ, $\frac{RB+PB}{PB}=\frac{RC+QC}{QC}$ (ಯೋಗನಿಷ್ಪತ್ತಿ ಕ್ರಿಯೆ)

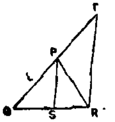
$\therefore \frac{PR}{PB}=\frac{QR}{QC}=\frac{QR}{AB}$ ($\because$ QC = AB)

ಆದರೆ, $\frac{PR}{PB}=\frac{PQ}{PA}$ (ಅನುಮಿತ 1) $\therefore \frac{PQ}{PA}=\frac{QR}{AB}$

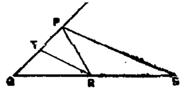
ಅಥವಾ, PA : PQ = AB : QR.

ಪ್ರಮೇಯ 5

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೀರ್ಷಕೋನದ ಆಂತರಿಕ (ಅಥವಾ ಬಾಹ್ಯ) ಸಮಭಾಜಕಗಳು ಅದರ ಪಾದವನ್ನು ಆ ಕೋನವನ್ನುಳ್ಳ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ (ಅಥವಾ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ) ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 17



ಚಿತ್ರ 18

ದತ್ತ : PQR ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ PS ರೇಖೆಯು QPR ಕೋನವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ (ಅಥವಾ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ) ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ ಅದು QR ಬಾಹುವನ್ನು (ಅಥವಾ ವೃದ್ಧಿಸಿದ QR) S ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 17, 18).

ಸಾಧನೀಯ : QS : SR = PQ : PR.

ರಚನೆ : R ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ PS ರೇಖೆಗೆ ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅದು QP ಯನ್ನು (ಅಥವಾ ವೃದ್ಧಿಸಿದ QP) T ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. T ಮತ್ತು L ಬಿಂದುಗಳು P ಬಿಂದುವಿನ ಎದುರು ಬದುರು ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿರುವಂತೆ QP ಯ ಮೇಲೆ L ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ಅಂದರೆ ಚಿತ್ರ 17 ರಲ್ಲಿ L ಬಿಂದುವು QP ಯ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ 18 ರಲ್ಲಿ ಅದು ವೃದ್ಧಿಸಿದ QP ಯ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : RT || SP (ರಚನೆ)

∴ $\angle PRT$ = ಪರ್ಯಾಯಕೋನ RPS, $\angle LPS$ = ಅನುರೂಪ ಕೋನ PTR.

ಆದರೆ, $\angle RPS = \angle LPS$ (ದತ್ತ) ∴ $\angle PRT = \angle PTR$

∴ PT = PR ಈಗ, QRT ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, PS || RT (ರಚನೆ).

∴ QS : SR = PQ : PT. ಆದರೆ, PT = PR (ಸಾಧಿಸಿದೆ).

∴ QS : SR = PQ : PR.

ವಿಲೋಮ ಪ್ರಮೇಯ :

ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದವನ್ನು ಬಾಹುಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆಯು ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ದತ್ತ: PQR ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪಾದ QR ಗೆ QS : SR = PQ : PR ಇರುವಂತೆ PS ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ (ಚಿತ್ರ 17).

ಸಾಧನೀಯ: PS ರೇಖೆಯು QPR ಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, $\angle QPS = \angle RPS$

ರಚನೆ: ಪ್ರಮೇಯ 5ರಲ್ಲಿರುವಂತೆಯೆ.

ಸಾಧನೆ: PS || TR (ರಚನೆ) ∴ QS : SR = PQ : PT

ಆದರೆ, QS : SR = PQ : PR (ದತ್ತ). ∴ PQ : PT = PQ : PR

∴ PT = PR. ∴ $\angle PTR = \angle PRT$

ಆದರೆ, PTR = ಅನುರೂಪಕೋನ LPS (ರಚನೆ). $\angle PRT$ = ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನ RPS (ರಚನೆ). ∴ $\angle LPS = \angle RPS$

ಅಂದರೆ, PS ರೇಖೆಯು QPR ಕೋನವನ್ನು (ಶೃಂಗಕೋನ) ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (*a*)

(1) ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಪಾರ್ಶ್ವಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯು ಅದರ ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(2) ABCD ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ. P, Q, R ಮತ್ತು S ಗಳು AD, AB, BC ಮತ್ತು CD ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು. ಹಾಗಿದ್ದರೆ, PQRS ಒಂದು ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(3) PQRS ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ. ಸಮಾನಾಂತರ ಬಾಹುಗಳಾದ PS ಮತ್ತು QR ಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು ರೇಖೆ AB ಯನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. AB ರೇಖೆಯು PQ ಮತ್ತು SR (ಅಥವಾ, ವೃದ್ಧಿಸಿದ PQ ಮತ್ತು SR) ಗಳನ್ನು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) ABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AB = AC. P ಮತ್ತು Q ಗಳು AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು. PQ ರೇಖೆಯು BC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(5) ಮೂರು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು ತಮ್ಮನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಅಡ್ಡ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

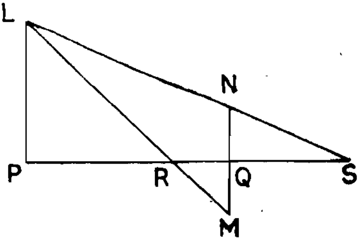
(6) ಶೀರ್ಷ ಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವ ರೇಖೆಯು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜವು ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ರಚನೆ 3

ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ದತ್ತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುವ ಕ್ರಮ:

ದತ್ತ : PQ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ; $m:n$ ಪ್ರಮಾಣ.

ಕರ್ತವ್ಯ : PQ ರೇಖೆಯನ್ನು $m:n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಬೇಕು.



ಚಿತ್ರ 19

ರಚನೆ : P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ PQ ಗೆ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ಲಂಬದಿಂದ, ಯಾವುದಾದರೂ ಅನುಕೂಲವಾದ ಉದ್ದದ m ನಷ್ಟು ಇರುವಂತೆ PL ಭಾಗವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 19). ಅದೇ ರೀತಿ, Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ PQ ಗೆ ಒಂದು ಲಂಬವನ್ನು L ಬಿಂದುವಿನ ಎದುರು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ಎಳೆದು, ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಉದ್ದದ n ನಷ್ಟು ಭಾಗವನ್ನು ಈ ಲಂಬದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ. ಅದು QM ಆಗಿರಲಿ. LM ಸೇರಿಸಿ. ಇದು PQ ವನ್ನು R ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ಆಗ R ಬಿಂದುವು PQ ರೇಖೆಯನ್ನು $m:n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ, Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ PQ ಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವನ್ನು L ಬಿಂದುವಿನ ಅದೇ ಪಾರ್ಶ್ವದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಮೊದಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಉದ್ದದ n ನಷ್ಟು ಭಾಗವನ್ನು ಈ ಲಂಬದಿಂದ ಕತ್ತರಿಸಿ. ಅದು QN ಆಗಿರಲಿ. LN ಸೇರಿಸಿ ವೃದ್ಧಿಸಿ. ಈ ವೃದ್ಧಿಸಿದ ರೇಖೆಯು ವೃದ್ಧಿಸಿದ PQ ವನ್ನು S ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. ಆಗ, S ಬಿಂದುವು PQ ರೇಖೆಯನ್ನು $m:n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : PLS ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ QN $\parallel$ PL

$\therefore$ PS : QS = PL : QN (ಪ್ರಮೇಯ 4, ಅನುಮಿತ 3)

$= m : n$

ಅಂದರೆ, S ಬಿಂದುವು PQ ರೇಖೆಯನ್ನು $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೆ, $\triangle PRL \;|||\; \triangle QRM \quad (\because \angle P = 90^\circ = \angle Q,\ \angle PRL = \angle QRM)$

$\therefore PR : RQ = PL : QM$

$= m : n$

$\therefore$ R ಬಿಂದುವು PQ ರೇಖೆಯನ್ನು $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿ ಭೇದಿಸುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2 (*b*)

(1) 5·6 ಅಂಗುಲ ಉದ್ದವುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು 5:3 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಒಳಗೆ ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ.

(2) 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವುಳ್ಳ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಅದನ್ನು 4:7 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹೊರಗೆ ವಿಭಜಿಸಿರಿ.

(3) 6·4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವುಳ್ಳ PQ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದು ಅದನ್ನು 2:3 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಒಳಗೆ ಮತ್ತು ಹೊರಗೆ ವಿಭಾಗಿಸಿರಿ.

(4) 3·5 ಅಂಗುಲ ಉದ್ದವುಳ್ಳ AB ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. AC = 2 ಅಂಗುಲ ಇರುವಂತೆ AB ಯ ಮೇಲೆ C ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ AB ಯನ್ನು AC : CB ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಭೇದಿಸಿರಿ.

(5) 6·4 ಸೆಂ.ಮೀ. ಉದ್ದವಿರುವಂತೆ AB ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. AE = 8·8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ AB ಯನ್ನು E ಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ. AC : CB = AE : BE ಇರುವಂತೆ AB ಯಲ್ಲಿ C ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು

(SIMILAR TRIANGLES)

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು **ಸಮಾನ ಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಹಾಗೂ ಸಮಾನಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು **ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಾಮ್ಯತೆಯನ್ನು ≡ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ಅವುಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ||| ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\triangle$ ABC ||| $\triangle$ DEF ಎಂದು ಬರೆದರೆ, ABC ತ್ರಿಭುಜವು DEF ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕು.

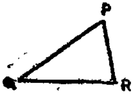
ಪ್ರಮೇಯ 6

ಸಮಾನಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

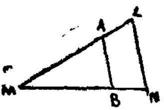
ದತ್ತ : PQR ಮತ್ತು LMN ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ

$\underline{|P} = \underline{|L}, \underline{|Q} = \underline{|M}, \underline{|R} = \underline{|N}$ (ಚಿತ್ರ 20. 21).

ಸಾಧನೀಯ : $\frac{PQ}{LM} = \frac{QR}{MN} = \frac{RP}{NL}$



ಚಿತ್ರ 20



ಚಿತ್ರ 21

ರಚನೆ: AM = PQ ಮತ್ತು MB = QR ಇರುವಂತೆ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ LM ಮತ್ತು MN ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿರಿ. AB ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಸಾಧನೆ: PQR ಮತ್ತು AMB ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ,

$\left.\begin{array}{l} PQ = AM, \\ QR = MB \end{array}\right\}$ (ರಚನೆ) ಮತ್ತು $\angle Q = \angle M$ (ದತ್ತ)

$\therefore \triangle PQR = \triangle AMB.$

$\therefore \angle QPR = \angle MAB, \ \angle QRP = \angle MBA.$

ಆದರೆ, $\angle QPR = \angle L, \ \angle QRP = \angle N$ (ದತ್ತ)

$\therefore \angle MAB = \angle MLN, \ \angle MBA = \angle MNL$ ಇವು ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು.

$\therefore AB \parallel LN. \quad \therefore \frac{LM}{AM} = \frac{NM}{BM}$ (ಪ್ರಮೇಯ 4, ಅನುಮಿತ 2)

ಆದರೆ, $AM = PQ$ ಮತ್ತು $BM = QR$ (ರಚನೆ).

$\therefore \frac{LM}{PQ} = \frac{NM}{QR}$ ಅಥವಾ, $\frac{PQ}{LM} = \frac{QR}{MN}$

ಇದೇ ರೀತಿ, $\frac{QR}{MN} = \frac{RP}{NL}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$\therefore \frac{PQ}{LM} = \frac{QR}{MN} = \frac{RP}{NL}$

ಪ್ರಮೇಯ 7

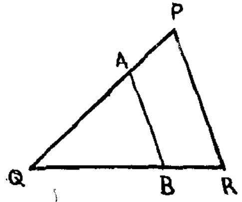
(6 ನೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ)

ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವ ಬಾಹುಗಳನ್ನುಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ **ಕೋನಗಳು** ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

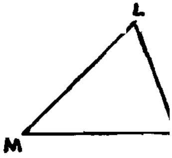
ದತ್ತ: PQR ಮತ್ತು LMN ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ $\frac{PQ}{LM} = \frac{QR}{MN} = \frac{RP}{NL}$

(ಚಿತ್ರ 22, 23)

ಸಾಧನೀಯ: $\angle R = \angle N, \ \angle P = \angle L, \ \angle Q = \angle M.$



ಚಿತ್ರ 22



ಚಿತ್ರ 23

ರಚನೆ : AQ = LM ಮತ್ತು QB = MN ಇರುವಂತೆ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ PQ ಮತ್ತು QR ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿರಿ. AB ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : PQR ಮತ್ತು LMN ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ. $\frac{PQ}{LM} = \frac{QR}{MN}$ (ದತ್ತ)

ಆದರೆ,

$$\left.\begin{array}{l} AQ = LM, \\ QB = MN \end{array}\right\}$$ (ರಚನೆ)

$\therefore \frac{PQ}{AQ} = \frac{RQ}{BQ}$ ಅಥವಾ,

$\frac{PQ - AQ}{AQ} = \frac{RQ - BQ}{BQ}$ (ಅಂತರ ಪ್ರಮಾಣ ಕ್ರಿಯೆ)

$\therefore \frac{PA}{AQ} = \frac{RB}{BQ} \therefore AB \parallel PR$ (ಪ್ರಮೇಯ 4ರ ವಿಲೋಮ)

$\therefore \angle QAB = \angle QPR, \angle QBA = \angle QRP$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

$\therefore$ QRP ಮತ್ತು QBA ಸಮಾನಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು.

$\therefore \frac{QR}{QB} = \frac{RP}{AB} = \frac{QP}{QA}$ (ಪ್ರಮೇಯ 6)

ಆದರೆ.

$$\left.\begin{array}{l} QA = LM \\ QB = MN \end{array}\right\}$$ (ರಚನೆ)

$$\therefore \frac{QR}{MN} = \frac{PQ}{LM} = \frac{RP}{BA}$$

ಆದರೆ,

$$\frac{QR}{MN} = \frac{PQ}{LM} = \frac{RP}{NL} \text{ (ದತ್ತ)}$$

$$\therefore \frac{RP}{BA} = \frac{RP}{NL} \quad \therefore AB = LN$$

ಈಗ, AQB ಮತ್ತು LMN ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ,

$$\left.\begin{array}{l} AQ = LM, \\ QB = MN \end{array}\right\} \text{ (ರಚನೆ) ಮತ್ತು } AB = LN \text{ (ಸಾಧಿಸಿದೆ)}$$

$$\therefore \triangle AQB \equiv \triangle LMN.$$

$$\therefore \angle QBA = \angle MNL, \angle BAQ = \angle NLM \text{ ಮತ್ತು } \angle Q = \angle M$$

ಆದರೆ,

$$\left.\begin{array}{l} \angle QBA = \angle QRP \\ \angle BAQ = \angle RPQ \end{array}\right\} \text{ (ಸಾಧಿಸಿದೆ)}$$

$$\therefore \angle R = \angle N, \angle P = \angle L \text{ ಮತ್ತು } \angle Q = \angle M.$$

ಅಥವಾ,

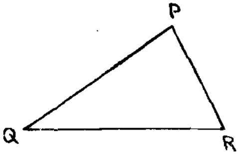
$\angle QRP = \angle MNL$,

$\angle RPQ = \angle NLM$ ಮತ್ತು

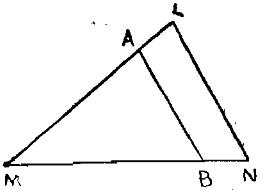
$\angle PQR = \angle LMN$.

ಪ್ರಮೇಯ 8

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನವು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದು ಆ ಕೋನಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಬಾಹುಗಳು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 24



ಚಿತ್ರ 25

ದತ್ತ : PQR ಮತ್ತು LMN ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle Q = \angle M$ ಮತ್ತು $PQ : LM = QR : MN$ (ಚಿತ್ರ 24, 25)

ಸಾಧನೀಯ : $\triangle PQR \,|||\, \triangle LMN$.

ರಚನೆ: $AM = PQ$ ಮತ್ತು $MB = QR$ ಇರುವಂತೆ A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ LM ಮತ್ತು MN ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿರಿ. AB ಸೇರಿಸಿರಿ.

ಸಾಧನೆ : PQR ಮತ್ತು AMB ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, $\left.\begin{matrix} PQ = AM \\ QR = MB \end{matrix}\right\}$ (ರಚನೆ)

$\angle Q = \angle M$ (ದತ್ತ).

$\therefore \triangle PQR \equiv \triangle AMB$.

$\therefore \angle QRP = \angle MBA,\ \angle RPQ = \angle BAM.$

ಈಗ, $\dfrac{PQ}{LM} = \dfrac{QR}{MN}$ (ದತ್ತ)

$\therefore \dfrac{AM}{LM} = \dfrac{BM}{NM} \begin{pmatrix} PQ = AM \\ QR = MB \end{pmatrix} \therefore AB \parallel LN.$

$\therefore \angle BAM = \angle NLM,\ \angle MBA = \angle MNL$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

ಆದರೆ,

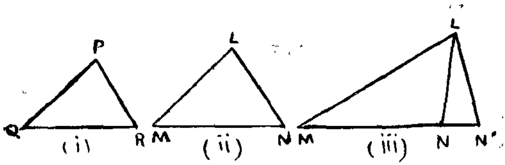
$\left.\begin{matrix} \angle BAM = \angle RPQ \\ \angle MBA = \angle QRP \end{matrix}\right\}$ (ಸಾಧಿಸಿದೆ).

$\therefore \angle P = \angle L,\ \angle Q = \angle M,\ \angle R = \angle N.$

$\therefore$ PQR ಮತ್ತು LMN ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು.

ಪ್ರಮೇಯ 9

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತೊಂದರ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳೊಡನೆ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದು ಒಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತೊಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ ಅಥವಾ ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ ; ಹಾಗೂ ಮೊದಲನೆಯ ಪಕ್ಷದಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 26

ದತ್ತ : PQR ಮತ್ತು LMN ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ

$PQ : LM = PR : LN$, $\angle Q = \angle M$ (ಚಿತ್ರ 26).

ಸಾಧನೀಯ : $\angle R = \angle N$, ಅಥವಾ, $\angle R + \angle N = 180°$.

ಸಾಧನೆ : P ಮತ್ತು L ಕೋನಗಳು (1) ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು **ಅಥವಾ** (2) ಅಸಮವಾಗಿರಬೇಕು.

(1) ನೆಯ ಪಕ್ಷ : P ಮತ್ತು L ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ [ಚಿತ್ರ 26 (i) (ii)], ಆಗ, $\angle R = \angle N$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ PQR ಮತ್ತು LMN ಸಮಾನಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ ಅವು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(2) ನೆಯ ಪಕ್ಷ : P ಮತ್ತು L ಕೋನಗಳು ಅಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ [ಚಿತ್ರ 26 (i), (iii)], $\angle QPR = \angle MLN'$ ಇರುವಂತೆ LN' ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ, ಇದು MN (ಅಥವಾ ವೃದ್ಧಿಸಿದ MN) ರೇಖೆಯನ್ನು N' ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.

ಈಗ, PQR ಮತ್ತು LMN' ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, $\angle Q = \angle M$ ಮತ್ತು $\angle QPR = \angle MLN'$. $\therefore$ $\angle QRP = \angle MN'L$. ಆದುದರಿಂದ, PQR ಮತ್ತು LMN' ಸಮಾನಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು.

$\therefore \triangle PQR \ ||| \ \triangle LMN'$

$\therefore PQ : LM = PR : LN'$. ಆದರೆ, $PQ : LM = PR : LN$ (ದತ್ತ)

$\therefore PR : LN = PR : LN' \quad \therefore LN = LN'$.

$\therefore \angle LNN' = \angle LN'N = \angle QRP$ (ಸಾಧಿಸಿದೆ)

ಆದರೆ, $\angle LNN' = 180° - \angle LNM \ \therefore \angle PRQ = 180° - \angle LNM$

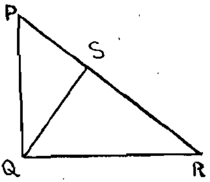
ಅಂದರೆ, PRQ ಕೋನವು LNM ಕೋನಕ್ಕೆ ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 10

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಲಂಬಕೋನದಿಂದ ಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮರೂಪವಾಗಿಯೂ, ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ : PQR ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle PQR = 90°$.

QS ರೇಖೆಯು ಕರ್ಣ PR ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 27).



ಚಿತ್ರ 27

ಸಾಧನೀಯ : $\triangle PQS \ ||| \ \triangle PRQ$

$\triangle QSR \ ||| \ \triangle PSQ$

$\triangle RSQ \ ||| \ \triangle RQP$

ಸಾಧನೆ : PQS ಮತ್ತು PRQ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle PSQ = 90° = \angle PQR$ (ದತ್ತ)

$\angle QPS = \angle QPR \quad \therefore \angle PQS = \angle QRP$.

$\therefore$ PQS ಮತ್ತು PRQ ಸಮಾನಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು.

$\therefore \triangle PQS \ ||| \ \triangle PRQ$.

ಈಗ, PQS ಮತ್ತು QRS ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle QSP = 90° = \angle RSQ$ (ದತ್ತ) $\angle PQS = \angle QRS$ (ಸಾಧಿಸಿದೆ)

$\therefore \angle SPQ = \angle SQR$.

$\therefore$ PQS ಮತ್ತು QRS ಸಮಾನಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು.

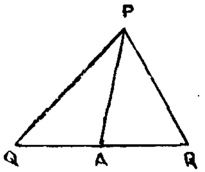
$\therefore \triangle PQS \ ||| \ \triangle QRS$.

ಇದೇ ರೀತಿ, $\triangle$ QRS ||| $\triangle$ PRQ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ, PRQ, PQS ಮತ್ತು RQS ಎಲ್ಲವೂ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು.

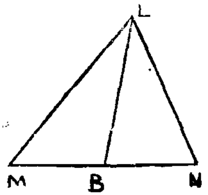
ಪ್ರಮೇಯ 11

ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, ಅನುರೂಪ ರೇಖೆಗಳಾದ, ಮಧ್ಯ ರೇಖೆಗಳು (ಮಧ್ಯಗಾಮಿ), ಲಂಬಗಳು, ಸಮಭಾಜಕಗಳು, ಪರಿತ್ರಿಜ್ಯಗಳು, ಅಂತರ್ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು, ಮುಂತಾದುವು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

[ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದೊಂದು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉಳಿದ ಅನುರೂಪ ರೇಖೆಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನೂ ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.]



ಚಿತ್ರ 28.



ಚಿತ್ರ 29.

ದತ್ತ : PQR ಮತ್ತು LMN ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, $\angle P = \angle L$, $\angle Q = \angle M$

ಮತ್ತು $\angle R = \angle N$. ಹಾಗೂ, $\frac{PQ}{LM} = \frac{QR}{MN} = \frac{RP}{NL}$.

ಸಾಧನೀಯ (1) : PA ಮತ್ತು LB ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳಾದರೆ. ಆಗ, PA : LB = PQ : LM (ಚಿತ್ರ 28, 29).

ಸಾಧನೆ : PQR ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, $QA = \frac{1}{2} QR$
LMN ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $MB = \frac{1}{2} MN$ } (ದತ್ತ) (ಚಿತ್ರ 28. 29)

$\therefore$ QA : MB = QR : MN. ಆದರೆ, QR : MN = PQ : LM (ದತ್ತ)

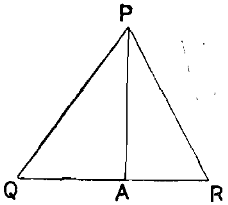
$\therefore$ QA : MB = PQ : LM.

ಈಗ, PQA ಮತ್ತು LMB ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, $\angle Q = \angle M$ (ದತ್ತ)

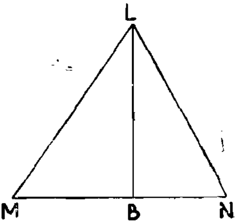
QA : MB = PQ : **LM** (ಸಾಧಿಸಿದೆ). ∴ △ **PQA** ||| △ **LMB** (ಪ್ರಮೇಯ 8)

∴ PQ : LM = PA : LB.

ಸಾಧನೀಯ (2) : PA, LB ರೇಖೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ QR ಮತ್ತು **MN** ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ, PQ : LM = PA : LB (ಚಿತ್ರ 30, 31)



ಚಿತ್ರ 30



ಚಿತ್ರ 31

ಸಾಧನೆ : PQA ಮತ್ತು LMB ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ, $\angle Q = \angle M$ (ದತ್ತ),

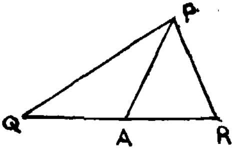
$\angle QAP = 90^\circ = \angle MBL$. ∴ $\angle APQ = \angle BLM$. ಆದುದರಿಂದ,

PQA ಮತ್ತು LMB ಸಮಾನಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು.

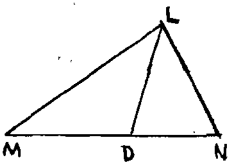
∴ △ PQA ||| △ LMB.

∴ PQ : LM = PA : LB.

ಸಾಧನೀಯ (3) : PA ರೇಖೆಯು **PQR** ತ್ರಿಭುಜದ $\angle QPR$ ನ **ಸಮ**



ಚಿತ್ರ 32



ಚಿತ್ರ 33

ಭಾಜಕವಾಗಿದ್ದು, LD ರೇಖೆಯು LMN ತ್ರಿಭುಜದ $\angle MLN$ ನ ಸಮಭಾಜಕ ವಾಗಿದ್ದರೆ, PA : LD = PQ : LM (ಚಿತ್ರ 32, 33).

ಸಾಧನೆ : $\angle QPR = \angle MLN$ (ದತ್ತ)

ಆದರೆ, $2\angle QPA = \angle QPR$, $2\angle MLD = \angle MLN$ } (ದತ್ತ)

$\therefore$ $\angle QPA = \angle MLD$ ಮತ್ತು $\angle Q = \angle M$ (ದತ್ತ). ಆದ್ದರಿಂದ,

$\angle QAP = \angle MDL$.

$\therefore$ PQA ಮತ್ತು MDL ಸಮಾನಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು.

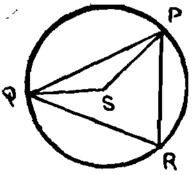
$\therefore$ $\triangle QAP \,|||\, \triangle MDL$. $\therefore$ PQ : LM = PA : LD.

ಸಾಧನೀಯ (4): PQR ಮತ್ತು LMN ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಪರಿಕೇಂದ್ರಗಳು S ಮತ್ತು T ಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ, PS : LT = PQ : LM (ಚಿತ್ರ 34, 35).

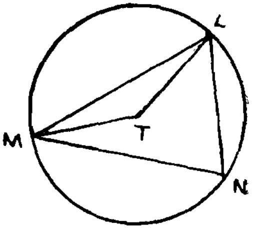
ಸಾಧನೆ: $\angle PSQ =$ ಪರಿಧಿಕೋನದ ಎರಡರಷ್ಟು

$= 2\angle PRQ$

ಅದೇ ರೀತಿ, $\angle LTM = 2\angle LNM$.



ಚಿತ್ರ 34



ಚಿತ್ರ 35

ಆದರೆ, $\angle PRQ = \angle LNM$ (ದತ್ತ)

$\therefore$ $\angle PSQ = \angle LTM$

PSQ ಮತ್ತು LTM ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು $\left(\because \begin{array}{l} PS = SQ \\ LT = TM \end{array}\right)$

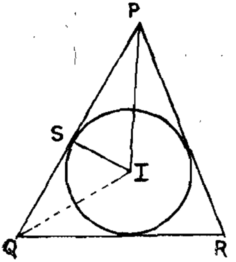
$\therefore$ PS : SQ = LT : TM

ಮತ್ತು $\angle PSQ = \angle LTM$ (ಸಾಧಿಸಿದೆ).

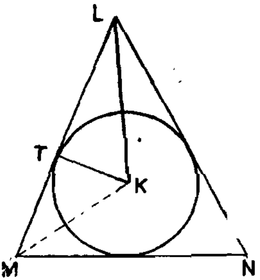
∴ △ PSQ ||| △ LTM (ಪ್ರಮೇಯ 8)

∴ PS : LT = PQ : LM.

ಸಾಧನೀಯ (5): IS ಮತ್ತು KT, PQR ಮತ್ತು LMN ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅಂತರ್‌ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ IS : KT = PQ : LM (ಚಿತ್ರ 36, 37).



ಚಿತ್ರ 36



ಚಿತ್ರ 37

ಸಾಧನೆ: IPQ ಮತ್ತು KLM, ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ,

∠IPQ = ∠KLM (∵ ∠P = ∠L ಮತ್ತು IP ಮತ್ತು KL ಅವುಗಳನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ).

∠IQP = ∠KML (∵ ∠Q = ∠M ಮತ್ತು IQ ಮತ್ತು MK ಅವುಗಳನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ)

∴ IPQ ಮತ್ತು KLM ಸಮಾನಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು

∴ △ IPQ ||| △ KLM.

ಈಗ, ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾದ IPQ ಮತ್ತು KLM ಗಳಲ್ಲಿ IS ಮತ್ತು KT ಲಂಬರೇಖೆಗಳು (ಅಂತರ್‌ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು).

∴ PQ : LM = IS : KT (ಸಾಧಿಸಿದೆ).

ಅಭ್ಯಾಸ 3

(1) ABC ಮತ್ತು DEF ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು. ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಒಂದೊಂದು ಲಘುಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ ಅವು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾಗಿರುವುವು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(2) PQR ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, QR ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಎಲ್ಲ ರೇಖೆಗಳನ್ನೂ AD ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(3) ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ AD ಯನ್ನು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದಿದೆ. $AD^2 = BD.DC$ ಆದರೆ, A ಯು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(4) PQR ಮತ್ತು LMN ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ $PQ = 12$, $QR = 13$, $\angle Q = 70^\circ$ ಮತ್ತು $RP = 5$ ಆಗಿದೆ. $MN = 26$ ಆದರೆ, $\angle L$, LM ಮತ್ತು LN ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5) O ಕೇಂದ್ರದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ TP ಮತ್ತು TQ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಗಳು. OT ಯು PQ ವನ್ನು R ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. $OR \cdot OT = OP^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(6) PQR ತ್ರಿಭುಜದ P ಕೋನದ ಸಮಭಾಜಕವು QR ನ್ನು S ನಲ್ಲಿಯೂ ಮತ್ತು ಪರಿವೃತ್ತವನ್ನು T ನಲ್ಲಿಯೂ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. $PQ \cdot PR = PS^2 + PS \cdot PT$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $PQ \cdot PR = PS^2 + QS \cdot SR$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(7) ABC ಮತ್ತು DEF ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು. ಇವುಗಳ BC ಮತ್ತು EF ಪಾದಗಳು P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. $AP : DQ = BC : EF$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(8) ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\angle BAC = 90^\circ$. A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ AD ರೇಖೆಯನ್ನು BC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದಿದೆ. $AB = p \cdot AC$ ಆದರೆ, $BD = p^2 \cdot CD = p \cdot AD$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 4

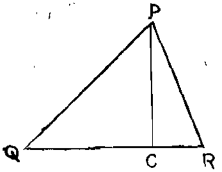
ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಲೆಗೆ ಅನುಪಾತದ ಪ್ರಯೋಗ

ಪ್ರಮೇಯ 12

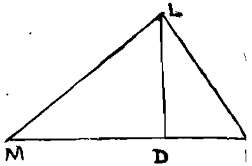
ಸಮ ಎತ್ತರವುಳ್ಳ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಲೆಗಳು ಅವುಗಳ ಪಾದಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ : PQR ಮತ್ತು LMN ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ PC = LD (ಚಿತ್ರ 38, 39).

ಸಾಧನೀಯ : $\frac{\triangle PQR}{\triangle LMN} = \frac{QR}{MN}$.



ಚಿತ್ರ 38



ಚಿತ್ರ 39

ಸಾಧನೆ: $\triangle PQR = \frac{1}{2}$ ಪಾದ $\times$ ಎತ್ತರ $= \frac{1}{2}\, QR \cdot PC$

$\triangle LMN = \frac{1}{2}$ ಪಾದ $\times$ ಎತ್ತರ $= \frac{1}{2}\, MN \cdot LD$

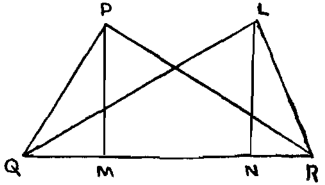
$$\therefore \frac{\triangle PQR}{\triangle LMN} = \frac{\frac{1}{2}\, QR \cdot PC}{\frac{1}{2}\, MN \cdot LD} = \frac{QR}{MN} \quad (\because PC = LD) \quad \text{(ದತ್ತ).}$$

ಪ್ರಮೇಯ 13

ಸಮಾನ ಪಾದಗಳ (ಒಂದೇ ಪಾದದ) ಮೇಲಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಲೆಗಳು ಅವುಗಳ ಎತ್ತರಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ : PQR ಮತ್ತು LQR ಒಂದೇ ಪಾದದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳು. PM ಮತ್ತು LN ಅವುಗಳ ಎತ್ತರಗಳು (ಚಿತ್ರ 40).

ಸಾಧನೀಯ : $\triangle PQR : \triangle LQR = PM : LN$.



ಚಿತ್ರ 40

ಸಾಧನೆ: $\frac{\triangle PQR}{\triangle LQR} = \frac{\frac{1}{2} QR.PM}{\frac{1}{2} QR.LN}$

$= \frac{PM}{LN}$

$\therefore \triangle PQR : \triangle LQR = PM : LN.$

ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಪಾದಗಳು ಸಮವಾದಾಗಲೂ, ಇದೇ ರೀತಿ, **ಅವುಗಳ ಸಲೆಗಳು** ಎತ್ತರಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಅನುಮಿತ: ಸಮಾನ ಪಾದಗಳ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಸಲೆಗಳು ಅವುಗಳ ಎತ್ತರಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

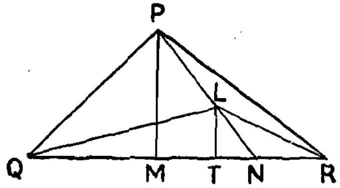
ಪ್ರಮೇಯ 14

ಒಂದೇ ಪಾದದ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಲೆಗಳು ಶೃಂಗಗಳ ಯೋಜಕ ರೇಖೆಯು ಪಾದದಿಂದ ವಿಭಜಿಸಲ್ಪಡುವ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ: PQR ಮತ್ತು LQR ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದವಾದ QR ಮೇಲಿವೆ. P ಮತ್ತು L ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ PL ರೇಖೆಯನ್ನು QR ಬಾಹುವು N ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೀಯ: $\frac{\triangle PQR}{\triangle LQR} = \frac{PN}{LN}$.

ರಚನೆ: A ಮತ್ತು L ಬಿಂದುಗಳಿಂದ PM ಮತ್ತು LT ರೇಖೆಗಳನ್ನು QR ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 41).



ಚಿತ್ರ 41

ಸಾಧನೆ : PMN ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ PM || LT

($\because$ PM ಮತ್ತು LT ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು).

$\therefore$ PM : LT = PN : LN (ಪ್ರಮೇಯ 4, ಅನುಮಿತ 3)

ಈಗ, $\dfrac{\triangle PQR}{\triangle LQR} = \dfrac{\frac{1}{2} QR \cdot PM}{\frac{1}{2} QR \cdot LT} = \dfrac{PM}{LT}$

$= \dfrac{PN}{LN}$ (ಸಾಧಿಸಿದೆ).

$\therefore$ $\triangle PQR : \triangle LQR = PN : LN$.

(ಟಿಪ್ಪಣಿ : PL ರೇಖೆಯು, ವೃದ್ಧಿಸಿದ QR ನ್ನು ಛೇದಿಸಬಹುದು. ಅದಕ್ಕೆ ತಕ್ಕ ಚಿತ್ರವನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೇ ಬರೆಯತಕ್ಕದ್ದು).

ಪ್ರಮೇಯ 15

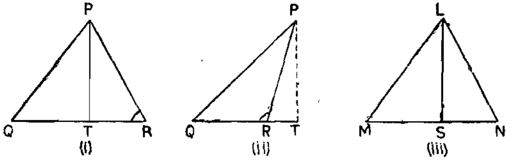
ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಒಂದು ಕೋನವು ಮತ್ತೊಂದರ ಒಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿ ಅಥವಾ ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿ ಇದ್ದರೆ, ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಲೆಗಳು ಈ ಕೋನಗಳ ಬಾಹುಗಳಿಂದಾದ ಆಯತಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ : PQR ಮತ್ತು LMN ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ,

42 (i), (iii) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ, $\angle PRQ = \angle LNM$

42 (ii), (iii) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ, $\angle PRQ + \angle LNM = 180°$

ಸಾಧನೀಯ : $\triangle PQR : \triangle LMN = QR \cdot RP : MN \cdot NL$.



ಚಿತ್ರ 42

ರಚನೆ: PT ಮತ್ತು LS ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ QR ಮತ್ತು MN ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ: PTR ಮತ್ತು LSN ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ

$\underline{|PTR} = 90° = \underline{|LSN}$ (ರಚನೆ)

$\underline{|PRT} = \underline{|LSN}$ [∵ 42 (i) ಮತ್ತು (iii) ನೆಯ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ **ದತ್ತ**.

42 (ii) ಮತ್ತು (iii) ನೆಯ ಚಿತ್ರಗಳಲ್ಲಿ,

$\underline{|PRQ} + \underline{|PRT} = 180°$, $\underline{|PRQ} + \underline{|LNS} = 180°$]

$\therefore \underline{|RPT} = \underline{|NLS}$

∴ PTR ಮತ್ತು LSN ಸಮಾನಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು, ತತ್ಕಾರಣ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು.

$\therefore PT : LS = PR : LN.$

ಈಗ, $\dfrac{\triangle PQR}{\triangle LMN} = \dfrac{\frac{1}{2} QR \cdot PT}{\frac{1}{2} MN \cdot LS} = \dfrac{QR \cdot PR}{MN \cdot LN}$ $\left[\because \dfrac{PT}{LS} = \dfrac{PR}{LN}\right.$ (ಸಾಧಿಸಿದೆ)$\left.\right]$

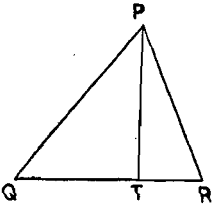
$\therefore \triangle PQR : \triangle LMN = QR \cdot RP : MN \cdot LN.$

ಪ್ರಮೇಯ 16

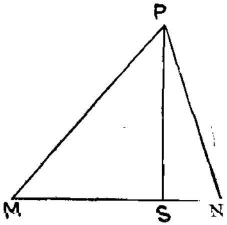
ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಲೆಗಳು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ದತ್ತ: PQR ಮತ್ತು LMN ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು (ಚಿತ್ರ 43, 44),

ಸಾಧನೀಯ: $\dfrac{\triangle PQR}{\triangle LMN} = \dfrac{QR^2}{MN^2}$



ಚಿತ್ರ 43



ಚಿತ್ರ 44

ರಚನೆ: P ಮತ್ತು L ಬಿಂದುಗಳಿಂದ, PT ಮತ್ತು LS ರೇಖೆಗಳನ್ನು QR ಮತ್ತು MN ಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಸಾಧನೆ: PQT ಮತ್ತು LMS ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ,

$\angle PQT = \angle LMS$ (ದತ್ತ)

$\angle QTP = 90^\circ = \angle MSL$ (ರಚನೆ)

$\therefore \angle TPQ = \angle SLM$

$\therefore$ PQT ಮತ್ತು LMS ಸಮಾನಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು;

$\therefore \triangle PQT \,|||\, \triangle LMS.$

$$\therefore \frac{PQ}{LM} = \frac{PT}{LS}$$

ಆದರೆ, $\dfrac{PQ}{LM} = \dfrac{QR}{MN} = \dfrac{RP}{NL}$ (ದತ್ತ)

$$\therefore \frac{PT}{LS} = \frac{QR}{MN} = \frac{RP}{NL}$$

ಈಗ, $\dfrac{\triangle PQR}{\triangle LMN} = \dfrac{\frac{1}{2} QR.PT}{\frac{1}{2} MN.LS}$

$$= \frac{QR}{MN} \cdot \frac{PT}{LS}$$

ಆದರೆ, $\frac{PT}{LS} = \frac{QR}{MN}$ (ಸಾಧಿಸಿದೆ)

$$\therefore \frac{\triangle PQR}{\triangle LMN} = \frac{QR}{MN} \cdot \frac{QR}{MN}$$

$$= \frac{QR^2}{MN^2}$$

$$\therefore \triangle PQR : \triangle LMN = QR^2 : MN^2.$$

ಇದೇ ರೀತಿ, $\frac{\triangle PQR}{\triangle LMN} = \frac{PQ^2}{LM^2} = \frac{PR^2}{LN^2}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 4 (*a*)

(1) LMN ಮತ್ತು PMN ಒಂದೇ ಪಾದವಾದ MN ಮೇಲೆ ನಿಂತಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳು. LA ಮತ್ತು MB ಗಳನ್ನು L ಮತ್ತು M ಬಿಂದುಗಳಿಂದ MN ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆದಿದೆ. LA : MB = 4 : 5 ಆದರೆ, ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಲೆಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ABC ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, BE, CF ಗಳು ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು.

$\triangle ABE : \triangle ACF = AB^2 : AC^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(3) ABC ತ್ರಿಭುಜದ BC ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ X ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದು ; AX ನ ಮೇಲೆ O ಒಂದು ಬಿಂದು.

BX : XC = 3 : 5 ಮತ್ತು XO : OA = 5 : 6 ಆದರೆ,

$\triangle OBC : \triangle ABC = 5 : 11$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(4) A ಮತ್ತು D ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕವಾಗಿಯೂ, AB : AC = DE : DF ಆಗಿಯೂ ಇರುವ ABC, DEF ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಲೆಗಳು $AB^2 : DF^2$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(5) AD : DB = *m* ಮತ್ತು AE : EC = *n* ಇರುವಂತೆ D, E ಗಳನ್ನು ABC ತ್ರಿಭುಜದ AB, AC ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿದೆ.

$\triangle ADE : \triangle ABC = mn : (1 + m)\ (1 + n)$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

(6) PQR ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ A ಯು QR ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು. D ಮತ್ತು E ಗಳು PQ ಬಾಹುವಿನ ತ್ರಿಭಾಜನ ಬಿಂದುಗಳು (Points of Trisection).

ಹಾಗಿದ್ದರೆ (i) $\triangle$ QAE : $\triangle$ PQR = 1 : 3 ಎಂದೂ,

(ii) $\triangle$ QAE : $\triangle$QAD = 2 : 1 ಎಂದೂ ಸಾಧಿಸಿ.

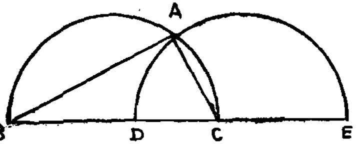
ರಚನೆ 4

ತ್ರಿಭುಜದ ಕೆಲವು ಪರಿಮಾಣಗಳು ದತ್ತವಾದಾಗ ಆ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಕ್ರಮ

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದವೂ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಪ್ರಮಾಣವೂ ದತ್ತವಾದಾಗ ಅಪಲೋನಿಯಸ್ ವೃತ್ತವು ಶೃಂಗಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವಾಗಿರುತ್ತದೆ (ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಿಲ್ಲ). ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದಾದರೂ ಮತ್ತೊಂದು ಪರಿಮಾಣವು ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಬಿಂದುವನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಅಲ್ಲಿಗೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

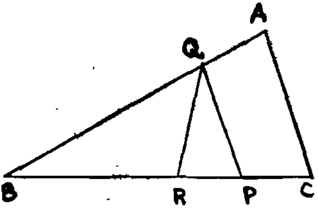
(1) ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ, ಬಾಹುಗಳ ಪ್ರಮಾಣ ಮತ್ತು ಶೃಂಗಕೋನ ಈ ಮೂರನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾಗ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವಿಕೆ.



ಚಿತ್ರ 45

ರಚನೆ : BC ಪಾದವನ್ನು ಎಳೆದು ಅದನ್ನು ದತ್ತ ಬಾಹುಗಳ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಆಂತರಿಕವಾಗಿಯೂ, ಬಾಹ್ಯವಾಗಿಯೂ ಛೇದಿಸಿ. ಹಾಗೆ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳು D ಮತ್ತು E ಗಳಾಗಿರಲಿ. DE ವ್ಯಾಸದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಇದೇ ಅಪಲೋನಿಯಸ್ ವೃತ್ತ. BC ಯ ಮೇಲೆ ದತ್ತ ಶೃಂಗಕೋನವನ್ನುಳ್ಳ ವೃತ್ತ ಖಂಡವನ್ನೆಳೆದರೆ ಅದು ಅಪಲೋನಿಯಸ್ ವೃತ್ತವನ್ನು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವೇ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ಶೃಂಗಬಿಂದು (ಚಿತ್ರ 45).

(2) BC = 6 ಸೆಂ.ಮೀ, AB : AC = 4 : 3, C − B = 40° ಇರುವ ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 46

ರಚನೆ: BQ : QR = 4 : 3 ಮತ್ತು Q = 40° ಇರುವಂತೆ BQR ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ. Q ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟು QR ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಜ್ಯಾವನ್ನು ಎಳೆದು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BR ನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿ. BP ಅಥವಾ ವೃದ್ಧಿಸಿದ BP ಯ ಮೇಲೆ BC = 6 ಸೆಂ.ಮೀ. ಇರುವಂತೆ C ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ. BQ ಅಥವಾ ವೃದ್ಧಿಸಿದ BQ ವನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ PQ ರೇಖೆಗೆ CA ರೇಖೆಯನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಆಗ ABC ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ತ್ರಿಭುಜ ವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: PQR ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ, QP = QR (ರಚನೆ).

$\therefore \angle QRP = \angle QPR = \angle ABC$ (ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು).

$\therefore \angle ACB - \angle ABC = \angle QRP - \angle ABC$

$= 40^\circ$ (ರಚನೆ)

ಹಾಗೂ $PQ \parallel AC$. $\therefore BA : BQ = AC : QP$.

$\therefore AB : AC = BQ : QP = BQ : QR$

$= 4 : 3.$

ಅಭ್ಯಾಸ 4 (*b*)

(1) ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಶಗಳಿಂದ ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು **ರಚಿಸಿ:**

(i) $a = 2{\cdot}6''$, $b : c$ 3 : 4, $\angle A = 70^\circ$.

(ii) BC = 6·5 ಸೆಂ.ಮೀ., AB : AC = 5 : 3, $\angle A = 65^\circ$.

(iii) $a = 3{\cdot}2''$, $b : c = 7 : 4$, $\angle A = 52^\circ$.

(iv) $BC = 5 \cdot 6$ ಸೆಂ.ಮೀ., $AB : AC = 3 : 2$. $\angle C = 68°$.

(v) $a = 2 \cdot 7''$, $b : c = 3 : 1$, $B - C = 30°$.

(vi) $a = 5 \cdot 2$ ಸೆಂ.ಮೀ., $b : c = 2 : 5$, $C - B = 50°$.

(vii) $BC = 3''$, $AB : AC = 4 : 5$, $C - B = 38°$.

(viii) $a = 6 \cdot 2$ ಸೆಂ.ಮೀ., $b : c = 3 : 7$, $C - B = 40°$.

(2) $AB : BC = 5 : 2$, $\angle B = 125°$, $BD = 2 \cdot 8''$ ಇರುವ ABCD ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಅದರ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಚಾರಿತ್ರಿಕ ಹಿನ್ನೆಲೆ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಸೂತ್ರಗಳು

1.1 ಚಾರಿತ್ರಿಕ ಹಿನ್ನೆಲೆ

ರೇಖಾಗಣಿತದ ಕೆಲವು ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ಮೂಲಕ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು **ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ**ವೆಂದು ಕರೆಯು ತ್ತಾರೆ. ಇದಕ್ಕೆ ತಳಹದಿಹಾಕಿದ ವಿಜ್ಞಾನಿ, ಫ್ರಾನ್ಸಿನ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನಾದ **ಡೆಕಾರ್ಟೆ** (De-Cartes, 1596-1650). ಆದುದರಿಂದಲೇ ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ ವನ್ನು ಆತನ ಹೆಸರಿನಲ್ಲಿಯೇ **ಕಾರ್ಟೆಸಿಯನ್ ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ** ಎಂದೂ ಕರೆಯುವುದೂ ಉಂಟು.

1.2 ಸ್ಥಾನ ನಿರ್ದೇಶನ ಕ್ರಮ

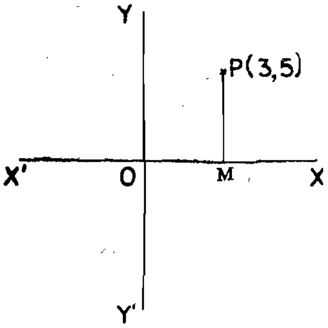
ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸ್ಥಳವನ್ನು **ಸೇರಬೇಕಾದರೆ** ಮೊದಲಿಗೆ ಒಂದು ನಿಶ್ಚಿತ ಜಾಗದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಪೂರ್ವದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ (ಅಥವಾ ಪಶ್ಚಿಮದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ) ಸ್ವಲ್ಪದೂರ ಹೋಗಿ, ನಂತರ ಉತ್ತರ (ಅಥವಾ ದಕ್ಷಿಣ) ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪದೂರ ಹೋಗಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಬೇಕಾದರೆ ಎರಡು ದಿಕ್ಕುಗಳಲ್ಲಿ ಅದರ ದೂರವನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಅಳತೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವನ್ನು **ಮೂಲಬಿಂದು** ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ದೂರವನ್ನು ಅಳೆಯಲು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸರಳರೇಖೆ ಗಳನ್ನು **ಅಕ್ಷ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.

1.3 ಸೂಚಕಗಳು (ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು)

ಮೊದಲೇ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ಮೂಲಾಧಾರ ರೇಖೆಗಳಾದ x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದೆ (ಚಿತ್ರ 1). ಇವು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದು O ಆಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, X′OX ಮತ್ತು YOY′ ರೇಖೆಗಳಿಗಿರುವ ಕೋನವು 90° ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಈ ರೇಖೆಗಳು ಮೂಲಬಿಂದುವಾದ O ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಈಗ, O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಪೂರ್ವಕ್ಕೆ OX ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 3 ಮಾನಗಳನ್ನು (ಉದಾಹರಣೆಗೆ) ಗುರುತಿಸಿದರೆ M ಬಿಂದುವು ಸಿಕ್ಕುತ್ತದೆ. ಅನಂತರ, M ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ



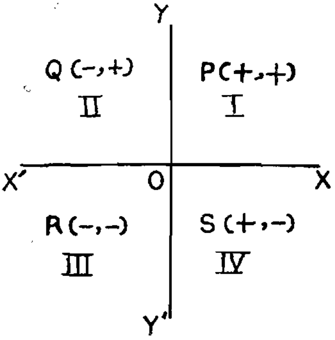
ಚಿತ್ರ

YOY' ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 5 ಮಾನಗಳನ್ನು (ಉದಾಹರಣೆಗೆ) ಗುರುತಿಸಿದರೆ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ P ಬಿಂದುವು ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, P ಬಿಂದುವು O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ 3 ಮಾನಗಳ ದೂರದಲ್ಲೂ, y – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾದ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 5 ಮಾನಗಳ ದೂರದಲ್ಲೂ, ಇರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ 3 ಮತ್ತು 5 ಮಾನಗಳನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನ **ಸೂಚಕ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಹಾಗೂ P ಬಿಂದುವನ್ನು P (3, 5) ಎಂದು ಬರೆದರೆ, ಆಗ 3, x–ಸೂಚಕವನ್ನೂ ಮತ್ತು 5 y–ಸೂಚಕವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ P (x, y) ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ x ಮಾನಗಳನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನ x – ಸೂಚಕ (ಅಥವಾ ಕೋಟಿ) (Abscissa) ಎಂದೂ y ಮಾನಗಳನ್ನು ಅದೇ P ಬಿಂದುವಿನ y – ಸೂಚಕ (ಅಥವಾ ಭುಜ) (Ordinate) ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಯಾವಾಗಲೂ ಆವರಣ ಚಿಹ್ನೆಯೊಳಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ಹಾಗೂ x – ಸೂಚಕವನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಮೊದಲು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚಕಗಳ ಚಿಹ್ನೆಗಳು

x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಚತುರ್ಥಭಾಗ (Quadrants) ಗಳೆಂದು ಕರೆದು ಅವುಗಳನ್ನು I, II, III ಮತ್ತು IV ಎಂಬ ಸಂಕೇತಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 2). ಈಗ



ಚಿತ್ರ 2

O ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಬಲಕ್ಕೆ (ಅಂದರೆ OX ಮೇಲೆ) ಯಾವ ದೂರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅದರ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಧನಾತ್ಮಕವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ OX′ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ (ಎಡಕ್ಕೆ) ಯಾವ ದೂರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅದನ್ನು ಋಣಾತ್ಮಕ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳದ್ದೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ OY ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ (x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲ್ಭಾಗ) ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ದೂರದ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಧನ ಚಿಹ್ನೆಯೆಂದೂ, OY′ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ (x – ಅಕ್ಷದ ಕೆಳಭಾಗ) ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ದೂರದ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಋಣಾತ್ಮಕವೆಂದೂ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಾಲ್ಕೂ ಚತುರ್ಥಭಾಗಗಳಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿದೆ :

(1) ಚತುರ್ಥಭಾಗ I ರಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಚಿಹ್ನೆಗಳು (+, +) ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

(2) ಚತುರ್ಥಭಾಗ II ರಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಚಿಹ್ನೆಗಳು (—, +) ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

(3) ಚತುರ್ಥಭಾಗ III ರಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಚಿಹ್ನೆಗಳು (—, —) ಆಗಿರುತ್ತವೆ

(4) ಚತುರ್ಥಭಾಗ IV ರಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಚಿಹ್ನೆಗಳು (+, —) ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

ಹಾಗೂ,

(5) ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳು (0, 0) ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

(6) x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳು $(x, 0)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

(7) y – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳು $(0, y)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

(6) ಮತ್ತು (7) ರಿಂದ,

x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅದರ y – ಸೂಚಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ y – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಯಾವ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅದರ x – ಸೂಚಕವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ವೇದ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಎರಡು ನಿರ್ದೇಶಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ x – ಮತ್ತು y – ಅಕ್ಷಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಬಹುದು ಹಾಗೂ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅದರ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು (ಸೂಕ್ತವಾದ ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಗಳ ಸಹಿತ) ಪಡೆಯಬಹುದು. ಈ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು **ಕಾರ್ಟೇಸಿಯನ್ ಸೂಚಕ**ಗಳೆಂದೂ ಕರೆಯುವುದುಂಟು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) (4, 6) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಚತುರ್ಥಭಾಗ I ರಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

(2) (—5, 7) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಚತುರ್ಥಭಾಗ II ರಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

(3) (—9,—8) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಚತುರ್ಥಭಾಗ III ರಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

(4) (6,—5) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಚತುರ್ಥಭಾಗ IV ರದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

(5) (0,—4) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು y – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.

(6) (5, 0) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.

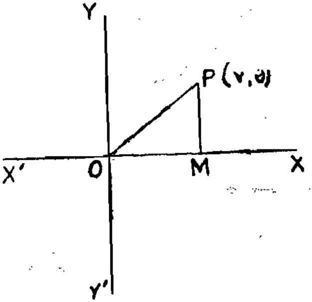
1.4. ಸ್ಥಾನನಿರ್ದೇಶನದ ಮತ್ತೊಂದು ಕ್ರಮ

ಕಾರ್ಟೇಸಿಯನ್ ಸೂಚಕಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಈ ಮೊದಲೇ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈಗ. ಧ್ರುವ ಸೂಚಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲವು ಅಂಶಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ಧ್ರುವ ಸೂಚಕಗಳು

ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಮೊದಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗುತ್ತದೆ. ಮೂಲಬಿಂದುವಾದ O ಎಂಬುದನ್ನು **ಧ್ರುವಬಿಂದು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರ 3). ಈಗ P ಬಿಂದುವು O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದೂರದಲ್ಲಿದೆಯೆಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ 5 ಮಾನಗಳು). ಇಷ್ಟರಿಂದ ಮಾತ್ರವೇ P ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಅನೇಕ ಬಿಂದುಗಳು ಇದೇ ದೂರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ, ಈ ದೂರದ ಜೊತೆಗೆ OP ರೇಖೆಯು

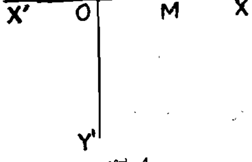
OX ರೇಖೆಯೊಡನೆ ಉಂಟು ಮಾಡುವ ಕೋನವೂ ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ, P ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವುದು ಸುಲಭವಾಗುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $\angle XOP = 60^\circ$ ಎಂದಾದರೆ, ಆಗ, $OP = 5$ ಮಾನಗಳು, $\angle XOP = 60^\circ$ ಎಂಬುದನ್ನು $P \equiv (5, 60^\circ)$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಸೂಚಕವು O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ P ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಸೂಚಕವು XOP ಕೋನವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 3

ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $P \equiv (r, \theta)$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ, $OP = r$ ಮಾನಗಳು, $\angle XOP = \theta$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಅಂದರೆ, ಧ್ರುವ ಸೂಚಕಗಳಾದ (r, θ) ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗಲೂ ಯಾವ ಬಿಂದುವನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ಗುರುತಿಸಬಹುದು.

1.5 ಕಾರ್ಟೀಸಿಯನ್ ಮತ್ತು ಧ್ರುವ ಸೂಚಕಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧ



ಚಿತ್ರ 4

XOX′, YOY′, x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 4). O ಮೂಲಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. $P(x, y)$ ಎಂಬುದು ಗೊತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. $OP = r$ ಮಾನಗಳು ಮತ್ತು $\angle XOP = \theta$ ಆಗಿರಲಿ. P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ PM ರೇಖೆಯನ್ನು OX ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ, OMP ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$y = PM = r \sin \theta$$ ಮತ್ತು

$$x = OM = r \cos \theta.$$

$$\therefore\ x = r \cos \theta \ldots\ldots (1)$$

ಮತ್ತು $y = r \sin \theta \ldots\ldots (2)$

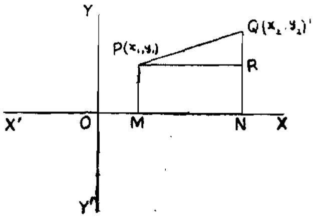
(1) ಮತ್ತು (2) ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ, x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು r ಮತ್ತು θ ಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅದೇ (1) ಮತ್ತು (2) ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ,

$$y^2 = x^2 + y^2 \ldots\ldots(3) \quad \text{ಮತ್ತು} \quad \theta = \tan^{-1} y/x \ldots\ldots(4)$$

ಅಂದರೆ, (3) ಮತ್ತು (4) ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ r ಮತ್ತು θ ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು x ಮತ್ತು y ಗಳಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

1.6 ಎರಡು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ



ಚಿತ್ರ 5

XOX′, YOY′ಗಳು x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ. $P \equiv (x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q \equiv (x_2, y_2)$ ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಿಂದ OX ರೇಖೆಗೆ PM ಮತ್ತು QN ಎಂಬ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 5). PR ರೇಖೆಯು QN ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ.

ಈಗ, PRQ ಸಮಕೋನದ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2 \ldots\ldots(1)$$

ಚಿತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ, $PR = MN = ON - OM = x_2 - x_1$

$$QR = QN - RN = QN - PM = y_2 - y_1$$

$$(\because RN = PM).$$

PR ಮತ್ತು QR ಗಳ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (1) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಆಗ

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರ d ಆದರೆ, ಆಗ,

$$d = PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ಮೇಲಿನ ಸಂಬಂಧದಲ್ಲಿ $(x_2, y_2) \equiv (0, 0)$ ಆದರೆ, ಆಗ, **(0, 0)** ಮತ್ತು (x_1, y_1) ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರ $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

ಅಂದರೆ, ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ

ದೂರ $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ [ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು (x_1, y_1) ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.]

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಅಳೆಯುವ ಬದಲು (ರೇಖಾಗಣಿತದ ವಿಧಾನ), ಅದೇ ದೂರವನ್ನು ಆ ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ. ಅಲ್ಲದೆ, ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮೊದಲನೆಯ ಚತುರ್ಥಭಾಗದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲಾಗಿದೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಯಾವ ಚತುರ್ಥಭಾಗದಲ್ಲಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ದೂರದ ಸೂತ್ರವು ಸತ್ಯ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) (0, 4) ಮತ್ತು (3, 0) ಗಳಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ಇಲ್ಲಿ, $x_1 \equiv 0$; $x_2 \equiv 3$
$y_1 \equiv 4$; $y_2 \equiv 0$

ಆದುದರಿಂದ,

$$d = \sqrt{(3 - 0)^2 + (0 - 4)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

$\therefore\ d = 5$ ಮಾನಗಳು.

(2) P (3, 2) ; Q (1, 5) ಮತ್ತು R (– 1, 2) ವುಳ್ಳ **PQR,** ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

ಆದುದರಿಂದ,

P ಮತ್ತು Q ಗಳಿಗಿರುವ ದೂರ = PQ

$$= \sqrt{(1 - 3)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Q ಮತ್ತು R ಗಳಿಗಿರುವ ದೂರ = QR

$$= \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

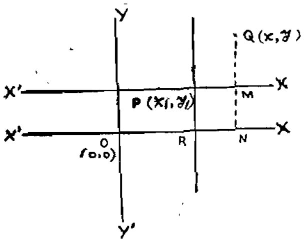
R ಮತ್ತು P ಗಳಿಗಿರುವ ದೂರ $= RP$

$$= \sqrt{(3+1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{16} = 4$$

ಇಲ್ಲಿ $PQ = QR = \sqrt{13}$.

ಆದುದರಿಂದ PQR ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ.

1.7 (*a*) ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಪಲ್ಲಟ



ಚಿತ್ರ 6

XOX′, YOY′, x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 6). O ಮೂಲ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

$P \equiv (x_1, \; y_1)$ ಆಗಿರಲಿ, $Q \equiv (x, \; y)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಅಕ್ಷಗಳ ದಿಕ್ಕುಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸದೆಯೇ ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು Pಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿರಿ.

ಈಗ, Pಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ y ನ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು (X, Y) ಎಂದು ತೆಗೆದು ಕೊಂಡರೆ, $X = PM$ ಮತ್ತು $Y = QM$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\therefore \; X = RN \quad (\because \; PM = RN)$$

$$= ON - OR = x - x_1 \quad \therefore \; X = x - x_1$$

ಮತ್ತು $Y = QM = QN - MN = QN - PR \quad (\because \; MN = PR)$

$$= y - y_1$$

$$\therefore \; X = x - x_1 \text{ ಮತ್ತು } \quad Y = y - y_1$$

ಆದುದರಿಂದ, Q ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಹೊಸ ಸೂಚಕಗಳಾದ (X, Y) ಗಳಿಗೂ ಮತ್ತು ಹಳೆಯ ಸೂಚಕಗಳಾದ (x, y) ಗಳಿಗೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವು,

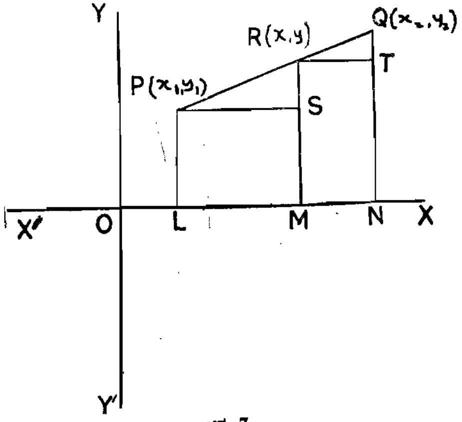
$$\left.\begin{aligned} X &= x - x_1 \\ Y &= y - y_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{ಅಥವಾ} \quad \left.\begin{aligned} x &= X + x_1 \\ y &= Y + y_1 \end{aligned}\right\}$$

1·7 (*b*) ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರ (ಎರಡನೆಯ ಕ್ರಮ)

$P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಎರಡು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. ಈಗ ಮೂಲಬಿಂದುವಾದ O (0, 0) ವನ್ನು P ಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ Q ಬಿಂದುವಿನ ಹೊಸ ಸೂಚಕಗಳು, $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದುದರಿಂದ, ಹೊಸ ಮೂಲ ಬಿಂದುವಾದ P ಯಿಂದ $Q(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಇರುವ ದೂರ $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

1.8 ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರಗಳು

***P* (x_1, y_1) ಮತ್ತು *Q* (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯನ್ನು $m:n$ ದತ್ತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ**



ಚಿತ್ರ 7

XOX′ ಮತ್ತು YOY′, x ಮತ್ತು y – ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 7).

$P \equiv (x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q \equiv (x_2, y_2)$ ಆಗಿರಲಿ. $R (x, y)$ ಬಿಂದುವು PQ ರೇಖೆಯನ್ನು $m:n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಒಳಗೆ ಛೇದಿಸಲಿ. ಅಂದರೆ, $PR : RQ = m : n$.

P, R ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ PL, RM ಮತ್ತು QN ರೇಖೆಗಳನ್ನು x ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ PS ಮತ್ತು RT ರೇಖೆಗಳನ್ನು x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆಯೂ ಮತ್ತು RM ಮತ್ತು QN ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ S ಮತ್ತು T ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆಯೂ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಆಗ, $\left.\begin{array}{l} OL = x_1 \\ PL = y_1 \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} OM = x \\ RM = y \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} ON = x_2 \\ QN = y_2 \end{array}\right\}$ ಹಾಗೂ,

$$\left.\begin{array}{l} PS = LM = OM - OL = x - x_1 \\ RS = RM - SM = RM - PL = y - y_1 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} RT = MN = ON - OM = x_2 - x \\ QT = QN - TN = QN - RM = y_2 - y \end{array}\right\}.$$

ಈಗ, ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳಾದ RPS ಮತ್ತು QRT ಗಳಿಂದ,

$$\frac{m}{n} = \frac{PR}{RQ} = \frac{PS}{RT} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

$$\therefore\ m(x_2 - x) = n(x - x_1)$$

ಅಂದರೆ, $x(m + n) = mx_2 + nx_1$

$$\therefore\ x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

ಅದೇ ರೀತಿ,

$$\frac{m}{n} = \frac{PR}{RQ} = \frac{RS}{QT} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$\therefore\ m(y_2 - y) = n(y - y_1)$$

ಅಂದರೆ, $y(m + n) = my_2 + ny_1$

$$\therefore\ y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$

ಆದುದರಿಂದ, $R (x, y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು PQ ರೇಖೆಯನ್ನು $m:n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಒಳಗೆ ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಆಗ ಅದರ ಸೂಚಕಗಳು,

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right) \text{ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.}$$

ಅದೇ ರೀತಿ, K (x, y) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು PQ ರೇಖೆಯನ್ನು $m : n$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಹೊರಗೆ ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಆಗ ಅದರ ಸೂಚಕಗಳು,

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}, \frac{my_2 - ny_1}{m - n}\right) \text{ ಆಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.}$$

ಅನುಮಿತ : P (x_1, y_1) ಮತ್ತು Q $(x_2\ y_2)$ ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳು

R (x, y) ಎಂಬುದು PQ ರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ,

PR : RQ = 1 : 1

ಈಗ, x, ಮತ್ತು y ಗಳಿಗಿರುವ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ $m = 1, n = 1$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, $x = \frac{x_2 + x_1}{2}$, $y = \frac{y_2 + y_1}{2}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳು,

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \text{ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) A (5, 4) ಮತ್ತು B (5, 6) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ 3:5 ರ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಒಳ ಛೇದನ :

ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ, $x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$, $y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$

ಲೆಕ್ಕದ ಪ್ರಕಾರ, $(x_1, y_1) \equiv (5, 4)$; $(x_2, y_2) \equiv (5, 6)$ ಮತ್ತು $m : n = 3 : 5$

$$\therefore x = \frac{15 + 25}{8} = \frac{40}{8} = 5$$

$$y = \frac{18 + 20}{8} = \frac{38}{8} = \frac{19}{4}$$

$$\therefore (x, y) \equiv \left(5, \frac{19}{4}\right)$$

ಹೊರ ಛೇದನ:

ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ, $x = \dfrac{mx_2 - nx_1}{m - n}$, $y = \dfrac{my_2 - ny_1}{m - n}$

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೆಕ್ಕದ ಪ್ರಕಾರ, $(x_1, y_1) \equiv (5, 4)$; $(x_2, y_2) \equiv (5, 6)$ ಮತ್ತು $m : n = 3 : 5$.

$$\therefore x = \frac{15 - 25}{3 - 5} = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$y = \frac{18 - 20}{3 - 5} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\therefore (x, y) \equiv (5, 1)$$

(2) P (6, − 2) ಮತ್ತು Q (8, − 4) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು **ಸೇರಿಸುವ ಸರಳ** ರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳು $\equiv \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

ಲೆಕ್ಕದ ಪ್ರಕಾರ, $(x_1, y_1) \equiv (6, -2)$ ಮತ್ತು $(x_2, y_2) \equiv (8, -4)$

$\therefore$ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳು $\equiv \left(\dfrac{6 + 8}{2}, \dfrac{-2 - 4}{2}\right)$

$$\equiv (7, -3)$$

(3) A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯ ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳು (4, 6). A ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳು (3, − 5) ಆಗಿದ್ದರೆ, B ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

B ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಗಳು (x_2, y_2) ಆಗಿರಲಿ.

ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ, $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

ಇಲ್ಲಿ, $\left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 6 \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ y_1 = -5 \end{array}\right\}$.

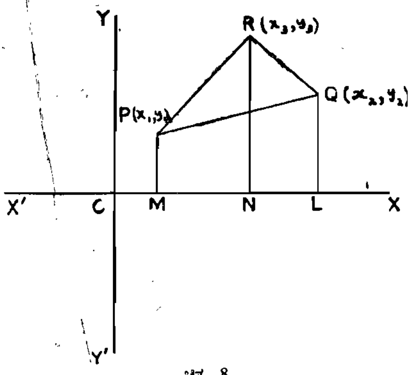
$\therefore 4 = \dfrac{3 + x_2}{2}$ ಅಂದರೆ, $x_2 = 8 - 3 = 5$

ಮತ್ತು, $6 = \frac{-5 + y_2}{2}$ ಅಂದರೆ, $y_2 = 12 + 5 = 17$.

∴ B ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳು (5, 17) ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

1.9 ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆಯನ್ನು ಅದರ ಶೃಂಗಗಳ (Vertices) ಸೂಚಕಗಳ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ

XOX′ ಮತ್ತು YOY′ x ಮತ್ತು y – ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 8).



ಚಿತ್ರ 8

PQR ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $P \equiv (x_1, y_1)$; $Q \equiv (x_2, y_2)$; $R \equiv (x_3, y_3)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $\left.\begin{matrix} OM = x_1 \\ PM = y_1 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} ON = x_3 \\ RN = y_3 \end{matrix}\right\}$ ಮತ್ತು $\left.\begin{matrix} OL = x_2 \\ QL = y_2 \end{matrix}\right\}$. ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

PQR ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆ $= \triangle$ PMNR $+ \triangle$ RNLQ $- \triangle$ PMLQ……(1)
[ಸಲೆಯನ್ನು $\triangle$ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದೆ].

ಇಲ್ಲಿ, PMNR, RNLQ ಮತ್ತು PMLQ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳು (Trapaziums).

ಹಾಗೂ, ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ಸಲೆ $= \frac{1}{2}$ (ಸಮಾನಾಂತರ ಭುಜಗಳ ಮೊತ್ತ) $\times$ ಎತ್ತರ.

∴ $\triangle$ PMNR $= \frac{1}{2}$ (PM + RN) $\times$ MN [PM, RN ಸಮಾನಾಂತರ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು MN = ಎತ್ತರ].

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) \cdots\cdots (2)$$

$(\because MN = ON - OM)$

$\triangle$ **RNLQ** $= \frac{1}{2}(RN + QL) \times NL$ [RN, QL ಸಮಾನಾಂತರ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು NL = ಎತ್ತರ]

$$= \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) \cdots\cdots (3)$$

$(\because NL = OL - ON)$

$\triangle$ PMLQ $= \frac{1}{2}(PM + QL) \times ML$ [PM, QL ಸಮಾನಾಂತರ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ML = ಎತ್ತರ]

$$= \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) \cdots\cdots \quad (4)$$

$(\because ML = OL - OM)$

(2), (3) ಮತ್ತು (4) ರಲ್ಲಿರುವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಆಗ,

$$\triangle PQR = \frac{1}{2}\left[(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

ಆದುದರಿಂದ, ಮೂರುಬಿಂದುಗಳಿಂದುಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆ,

$$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

$= \frac{1}{2}\Sigma x_1(y_2 - y_3)$ [ಮೊತ್ತವನ್ನು Σ ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದೆ.]

ಇಲ್ಲಿ, ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದು (0, 0) ಆಗಿರಲಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$(x_3, y_3) \equiv (0, 0)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆ $= \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

ಅಂದರೆ, ಮೂಲಬಿಂದು ಮತ್ತು ಇನ್ನೆರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದುಂಟಾದ

ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆ $= \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) (2, 4), (5, − 3) ಮತ್ತು (2, + 6) **ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ** ಸಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಲೆಕ್ಕದ ಪ್ರಕಾರ, $\left.\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ y_1 = 4, \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l} x_2 = 5 \\ y_2 = -3 \end{array}\right\}$ ಮತ್ತು $\left.\begin{array}{l} x_3 = 2 \\ y_3 = +6 \end{array}\right\}$

ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆ $= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

$= \frac{1}{2}[2(-3-6) + 5(6-4) + 2(4+3)]$

$= \frac{1}{2}(-18 + 10 + 14)$

$= \frac{1}{2} \times 6 = 3.$

$\therefore$ ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆ = 3 ಚದರ ಮಾನಗಳು.

(2) (3, — 5) ಮತ್ತು (6, 4) ಹಾಗೂ ಮೂಲಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $(x_1, y_1) \equiv (3, -5)$, $(x_2, y_2) \equiv (6, 4)$; $(x_3, y_3) \equiv (0, 0)$

ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆ $\equiv \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) = \frac{1}{2}[3 \times 4 - 6 \times (-5)] = 21$

$\therefore$ ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆ = 21 ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ 1

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(i) (0, 5); (6, 0) (ii) (0, 0); (— 4, — 5) (iii) (2, 3); (— 5 — 6); (iv) (— 2, — 3); (6, 5) (v) (— 4, — 5); (— 6, — 8) (vi) (— 4, 0) (0, — 6) (vii) $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$; $(b\cos\theta,\ a\sin\theta)$ (viii) $\left(at_1, \frac{a}{t_1}\right)$; $\left(at_2, \frac{a}{t_2}\right)$ (ix) $(a, 0)$; $(0, a)$ (x) $(a, -b)$; $(b, -a)$

(2) $(x, 5)$ ಮತ್ತು (4, 7) ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರ $\sqrt{20}$ ಆದರೆ x ನ ಬೆಲೆಯೆಷ್ಟು ?

(3) (3, 5) ಮತ್ತು $(6, y)$ ಗಳಿಗಿರುವ ದೂರ 5 ಆಗಿದ್ದರೆ, y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) P ≡ (3, 2); Q ≡ (4, 6); R ≡ (7, 3) ಆದರೆ, PQR ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(5) L ≡ (— 4, — 3); M ≡ (5, — 2); N ≡ (4, 7) ಆಗಿದ್ದರೆ, LMN ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(6) (5, 5); (— 5, — 5) ಮತ್ತು $(-5\sqrt{3},\ 5\sqrt{3})$ ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

ಕೆಳಕಂಡ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ದತ್ತ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ (ಆಂತರಿಕ ಮತ್ತು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ) ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(7) (3, 1) ಮತ್ತು (2, 5); ಪ್ರಮಾಣ 3: 2

(8) (– 2, 4) ಮತ್ತು (3, 7) ; ಪ್ರಮಾಣ 5: 3

(9) (3, – 1) ಮತ್ತು (2, – 5); ಪ್ರಮಾಣ 3: 4

(10) (– 2, – 4) ಮತ್ತು (– 3, – 7); ಪ್ರಮಾಣ 5: 2.

(11) P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು R (4, 6) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು 5: 3 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಒಳಗೆ ಅಥವಾ ಹೊರಗೆ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. Q ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳು (7, 3) ಆಗಿದ್ದರೆ, P ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(12) P ≡ (3, 4), Q ≡ (9, 8) ಆಗಿದ್ದರೆ PQ ರೇಖೆಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(13) AB ರೇಖೆಯು, (4, 7) ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ ವೃತ್ತದ ವ್ಯಾಸ. A ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳು (3, 6) ಆಗಿದ್ದರೆ, B ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(14) (0, 6), (3, 0) ಮತ್ತು (5, 2) ಬಿಂದುಗಳಿಂದುಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(15) (3, 5), (– 6, – 4) ಮತ್ತು (– 2, – 5) ಬಿಂದುಗಳಿಂದುಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(16) $(a, c+a)$, (a, c) ಮತ್ತು $(-a, c-a)$ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ಸಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 2

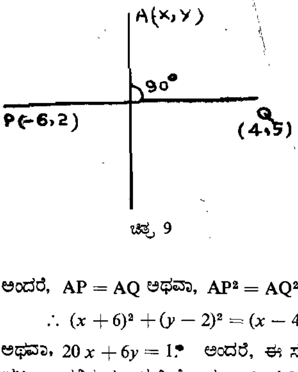
ಬಿಂದುಪಥ ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಗಳು

2.1 ಬಿಂದುಪಥ

ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಒಂದು ಬಿಂದುವು ದತ್ತ ನಿಬಂಧನೆ ಅಥವಾ ನಿಯಮಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಚಲಿಸಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಪಥಕ್ಕೆ **ಬಿಂದುಪಥ**ವೆಂದು ಹೆಸರು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) P (− 6, 2) ಮತ್ತು Q (4, 5) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವೇನು ?



ಚಿತ್ರ 9

ಮೇಲಿನ ನಿಯಮಕ್ಕನುಸಾರವಾಗಿ ಬಿಂದುವು ಚಲಿಸಿದರೆ ಅದರ ಬಿಂದು ಪಥವು PQ ರೇಖೆಯನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಅರ್ಧಿಸುವ ರೇಖೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 9).

ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾದ A (x, y) ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದು ದತ್ತ ನಿಯಮಕ್ಕೊಳಗಾಗಿರಬೇಕು.

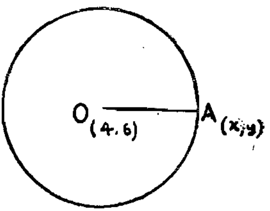
ಅಂದರೆ, $AP = AQ$ ಅಥವಾ, $AP^2 = AQ^2$

$$\therefore\ (x + 6)^2 + (y - 2)^2 = (x - 4)^2 + (y - 5)^2$$

ಅಥವಾ, $20x + 6y = 1$. ಅಂದರೆ, ಈ ಸಮೀಕರಣವು, ದತ್ತನಿಯಮಕ್ಕೊಳಪಟ್ಟು ಚಲಿಸುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಸೂಚಕಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವೆಂದಾಯಿತು. ಇದನ್ನೇ **ಬಿಂದುಪಥದ ಸಮೀಕರಣ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(2) (4, 6) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಯಾವಾಗಲೂ 7 ಮಾನಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥ ಮತ್ತು ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ನಿಯಮಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವು, (4, 6) ಎಂಬುದನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ ಹಾಗೂ 7 ಮಾನಗಳನ್ನು ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗುಳ್ಳ ಒಂದು ವೃತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 9*a*).



ಚಿತ್ರ 9*a*

ಬಿಂದುಪಥದ ಮೇಲೆ A (x, y) ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅದು ಅನುಸರಿಸಬೇಕಾದ ನಿಯಮ : A (x, y) ಬಿಂದುವಿಗೂ O (4, 6) ಬಿಂದುವಿಗೂ ಇರುವ ದೂರ ಯಾವಾಗಲೂ 7 ಮಾನಗಳು.

ಅಂದರೆ, $AO = 7$ ಅಥವಾ, $AO^2 = 49$

$\therefore\ (x-4)^2 + (y-6)^2 = 49.$ ಇದನ್ನು ಬಿಂದುಪಥದ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಮುಖ್ಯ ಅಂಶಗಳು :

(1) ಬಿಂದುಪಥದ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸಬೇಕು.

(2) ಆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಬಿಂದುಪಥದ ಮೇಲಿರಬೇಕು.

(3) ಆ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಾಲಿಸದೆ ಇರುವ ಯಾವ ಬಿಂದುವೂ ಬಿಂದುಪಥದ ಮೇಲಿರುವುದಿಲ್ಲ.

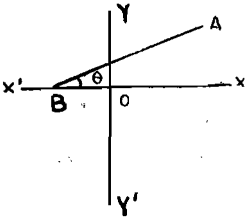
(4) ಒಂದು ಬಿಂದುಪಥವು ಅದರ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನ x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

2.2 ಸರಳರೇಖೆ

ಸರಳರೇಖೆಯು ಬಿಂದುಪಥಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲಾ ಅತಿ ಸುಲಭವಾದುದು. ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕಾದರೆ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರಬೇಕು ಅಥವಾ ಆ ಸರಳರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕು ಮತ್ತು ಅದರ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ, ಸರಳರೇಖೆಯು ಎರಡು ದತ್ತ ನಿಯಮಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಚಲಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥವೆಂದಾಯಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ನಿಯಮಗಳಿಗನುಸಾರವಾಗಿ ಚಲಿಸುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಬಿಂದುಪಥದ

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

2.3 ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ (ಏರು)



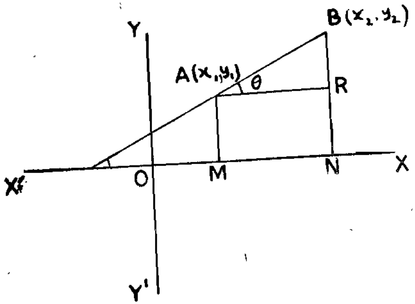
ಚಿತ್ರ 10

XOX' ಮತ್ತು YOY', x ಮತ್ತು y– ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 10). AB ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ. θ ಎಂಬುದು AB ಸರಳರೇಖೆಯು x– ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ.

ಆಗ, $\tan\theta$ ಎಂಬ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು AB ರೇಖೆಯ ಓಟ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $m = \tan\theta$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ m ಎಂಬುದು **ಆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ**ವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

$A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ

XOX' ಮತ್ತು YOY', x ಮತ್ತು y– ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 11). AB ದತ್ತ ರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $A \equiv (x_1, y_1)$; $B \equiv (x_2, y_2)$ ಆಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 11

ವೃದ್ಧಿಸಿದ BA, x – ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನೊಡನೆ θ ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡಲಿ. AM ಮತ್ತು BN, x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. AR ರೇಖೆಯು BN ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ, AR ರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ $\underline{|BAR} = \theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ARB ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ,

$$\tan\theta = \frac{BR}{AR} = \frac{BN - RN}{ON - OM} = \frac{BN - AM}{ON - OM} \quad (\because RN = AM)$$

$$\therefore\ m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \left[\because \begin{array}{l} BN = y_2,\ AM = y_1 \\ ON = x_2,\ OM = x_1 \end{array}\right]$$

ಆದುದರಿಂದ, (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ $= m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 60° ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ, $m = \tan\theta$.

$$= \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$\therefore$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ $= \sqrt{3}$.

(2) (5, 6) ಮಾತ್ತು (7, 9) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು **ಸೇರಿಸುವ** ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\text{ಇಲ್ಲಿ, } \left.\begin{array}{l} x_1 = 5 \\ y_1 = 6 \end{array}\right\} \text{ ಮತ್ತು } \left.\begin{array}{l} x_2 = 7 \\ y_2 = 9 \end{array}\right\}$$

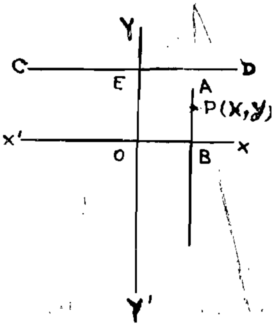
$$\text{ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ, } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore\ m = \frac{9 - 6}{7 - 5} = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore \text{ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ} = \frac{3}{2}.$$

2.4 ಸರಳ ರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು

(i) x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳು :



ಚಿತ್ರ 12

XOX′ ಮತ್ತು YOY′, x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 12). AB ರೇಖೆಯು y–ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರ ವಾಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ, ಅದು OY ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ ಅದು OX ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ B ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ, OB $= C$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಹಾದುಹೋಗಲಿ.

ಈಗ, P (x, y) ಎಂಬುದು AB ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾದರೆ, ಅದರ x – ಸೂಚಕವು C ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $x = c$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಸಮೀಕರಣವು AB ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವಿಗೂ ಸತ್ಯ. ಮೊದಲೇ ತಿಳಿಸಿರುವ ವಾದಸರಣಿಯ ಪ್ರಕಾರ, ಇದು ಒಂದು ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿರಬೇಕು. ಅದೇ ರೀತಿ x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = d$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 12 OE $= d$).

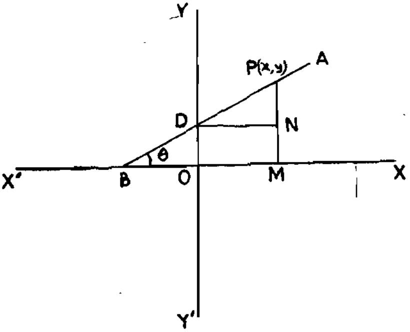
ಅನುಮಿತ : x – ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವು, $y = 0$ ಮತ್ತು

y = ಅಕ್ಷದ ಸಮೀಕರಣವು $x = 0$ ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ.

(ii) ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ ಮತ್ತು ಅದು y– ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮಾಡುವ ಅಂತಃಖಂಡವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಆ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ :

XOX′ ಮತ್ತು YOY′, x ಮತ್ತು y – ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 13). AB ಎಂಬುದು ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ.

θ ಎಂಬುದು AB ರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷದ ಧನಾತ್ಮಕ ದಿಕ್ಕಿನೊಡನೆ ಮಾಡುವ ಕೋನವಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 13

ಆಗ, ಓಟ $= m = \tan\theta$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂತಃಖಂಡ $=$ DO $=$ C ಆಗಿರಲಿ,

P (x, y) ಎಂಬುದು AB ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ.

PM ರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿಯೂ, DN ರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರಗಿಯೂ ಇರಲಿ.

x, y, m ಮತ್ತು c ಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದರಿಂದ ನಮಗೆ AB ರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ ದೊರಕಿದಂತಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, DNP ಸಮಕೋನತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\underline{|PDN} = \underline{|PBN} = \theta$

ಹಾಗೂ, $\tan\theta = \frac{PN}{DN} = \frac{PM - NM}{OM} = \frac{PM - DO}{OM}$ $(\because\ NM = DO)$

$$= \frac{y - c}{x} \quad (\because\ PM = y$$

$$DO = c$$

$$OM = x)$$

$$\therefore\ m = \tan\theta = \frac{y - c}{\quad}$$

ಅಂದರೆ, $y - c = mx$

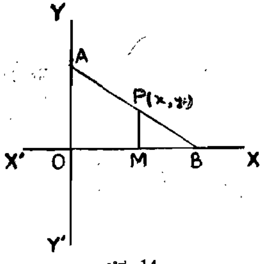
ಅಥವಾ $y = mx + c$

ಆದುದರಿಂದ, ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ ಮತ್ತು y–ಅಂತಃಖಂಡ ತಿಳಿದಿದ್ದಾಗ ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $y = mx + c$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅನುಮಿತ: $y = mx + c$ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $c = 0$ ಆದಾಗ, $y = mx$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಮೂಲಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ (ಅಂತಃಖಂಡ $= 0$), m ಓಟವುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

(iii) x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ 'a' ಮತ್ತು 'b' ಅಂತಃಖಂಡಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ:

XOX′ ಮತ್ತು YOY′, x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 14). AB ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯಾಗಿರಲಿ ಹಾಗೂ ಅದು OX ಮತ್ತು OY ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ $OB = a$, $OA = b$ ಆಗಿರುವಂತೆ B ಮತ್ತು A ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. P (x, y) ಎಂಬುದು AB ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. PM ರೇಖೆಯು OX ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 14

ಇಲ್ಲಿ, x, y, a ಮತ್ತು b ಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಈಗ, ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪ್ರಕಾರ, $\frac{OM}{OB} = \frac{PA}{AB}$ ಮತ್ತು $\frac{NP}{OA} = \frac{BP}{AB}$

[∵ OBA ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ PM ರೇಖೆಯು AO ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿದೆ]

$$\therefore \frac{OM}{OB} + \frac{MP}{OA} = \frac{PA}{AB} + \frac{BP}{AB} = \frac{PA + BP}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$$

$$\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (\because OM = x, \; MP = y)$$

ಅಂದರೆ, x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ a ಮತ್ತು b ಅಂತಃಖಂಡಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು,

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(iv) (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ:

ಮೊದಲೇ ತಿಳಿಸಿರುವಂತೆ $y = mx + c$...... (1)

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು x, y, m ಮತ್ತು c ಗಳಿಗಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ, m ಮತ್ತು c ಗಳ ಸೂಕ್ತವಾದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಯಾವ ತರಹೆಯ ಸಮೀಕರಣದ ಅವಶ್ಯಕತೆಯಿದೆಯೋ ಅದನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯು (x_1, y_1) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಲಿ. ಅಂದರೆ, (x_1, y_1) ಬಿಂದುವು ಆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಆಗ, (1) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣವು, $y_1 = mx_1 + c$......(2) ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಸಮೀಕರಣ (2) ರಿಂದ ಬರುವ c ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಆಗ, (1) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣವು,

$y - y_1 = m(x - x_1)$......(3) ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದು, m ಓಟವುಳ್ಳ ಮತ್ತು (x_1, y_1) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

(3) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯು, $(x_2\ y_2)$ ಎಂಬ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಲಿ.

ಆಗ, (3) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ ಅಥವಾ,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.}$$

'm' ನ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು (3) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

ಆಗ $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ ಅಥವಾ,

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$......(4). ಇದು (x_1, y_1) ಮತ್ತು (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

2.5 **ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಬೇಕಾದರೆ ಎರಡು ಮುಖ್ಯವಾದ ಅಂಶಗಳು ತಿಳಿದಿರಬೇಕು. ಅವು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಒಂದು ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಸರಳರೇಖೆಯ ದಿಕ್ಕು ಆಗಿರಬಹುದು.**

ಎಂದರೆ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವು ಎರಡು ನಿಶ್ಚಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಆ ನಿಶ್ಚಿತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದುದರಿಂದ, ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು

$Ax + By + C = 0$ ....(5) ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇಲ್ಲಿ A, B ಮತ್ತು C ನಿಶ್ಚಿತ ಬೆಲೆಯುಳ್ಳವು. ಅಂದರೆ, ಬಿಂದಪಥದ ಮೇಲಿನ ಯಾವ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ A, B ಮತ್ತು C ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಹೋಗುವುದಿಲ್ಲ. (5) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಯಾವುದೊಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬೇಕಾದರೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

(i) (5) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $By = -Ax - C$ ಎಂದು ಬರೆದು ಅದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು B ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಆಗ,

$$y = \left(\frac{-A}{B}\right)x + \left(\frac{-C}{B}\right)$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು,

$$y = mx + c \left[m = \frac{-A}{B},\ c = \frac{-C}{B}\right]$$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

(ii) (5) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $Ax + By = -C$ ಎಂದು ಬರೆದು, ಅದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು $-C$ ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಆಗ, ಅದು,

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$$ ಅಥವಾ,

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \begin{pmatrix} a = -C/A \\ b = -C/B \end{pmatrix}$$ ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

(iii) (5) ನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $Ax + By = -C$ ಎಂದು ಬರೆದು ಅದರಲ್ಲಿ $A = \cos\alpha$, $B = \sin\alpha$ ಮತ್ತು $-C = p$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಆಗ,

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಇದು, ಮೂಲಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬರೇಖೆಯ ಉದ್ದವನ್ನೂ (ಅಂದರೆ, p) ಮತ್ತು ಆ ಲಂಬರೇಖೆಯು x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮಾಡುವ ಕೋನವನ್ನೂ (ಅಂದರೆ, α) ಕೊಟ್ಟಾಗ ಪಡೆಯಬಹುದಾದಂತಹ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ದತ್ತನಿಯಮಗಳಿಂದ ಪಡೆಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೇ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬೇಕು.

ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, $Ax + By + C = 0$ ಎಂಬ ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ಯಾವ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ $30°$ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡಿ, 5 **ಮಾನ** y – **ಅಂತಃ**ಖಂಡವನ್ನುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $m = \tan \theta = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ಮತ್ತು $c = 5$ ಮಾನಗಳು.

$\therefore$ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $y = mx + c$ ಅಂದರೆ,

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} x + 5$$ ಅಥವಾ, $$x - y\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 0$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(2) y – ಅಕ್ಷದಿಂದ 5 ಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿ, ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

y – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವು $x = c$.

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ, $x = 5$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(3) x – ಅಕ್ಷದಿಂದ 8 ಮಾನಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ, ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣವು, $y = d$, ಅಂದರೆ $y = 8$.

(4) ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ x ಮತ್ತು y ಅಂತಃಖಂಡಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ -5, 6 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. ಇಲ್ಲಿ, $a = -5$, $b = 6$.

$\therefore \frac{x}{-5}+\frac{y}{6}=1 \quad \therefore 6x-5y=-30$ ಅಥವಾ,

$$6x-5y+30=0.$$

(5) 4 ಮಾನ, x ಅಂತಃಖಂಡವನ್ನುಳ್ಳ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯು (5, 2) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

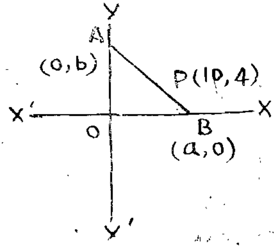
ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ಇದು (5, 2) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $a=4$ ಮಾನಗಳು.

$\therefore \frac{5}{4}+\frac{2}{b}=1$ ಅಂದರೆ, $5b+8=4b \quad \therefore b=-8.$

ಈಗ, $a=4,\ b=-8$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ. ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣವು.

$\frac{x}{4}-\frac{y}{8}=1$ ಎಂದರೆ, $2x-y=8$ ಅಥವಾ, $2x-y-8=0.$

(6) x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ a ಮತ್ತು b ಅಂತಃಖಂಡಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು (10, 4) ಬಿಂದುವು 5 : 4 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಒಳಗೆ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 15

ಚಿತ್ರ 15 ರಲ್ಲಿ, x ಅಂತಃಖಂಡ $= a$ ಮತ್ತು y ಅಂತಃಖಂಡ $= b$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ AB ರೇಖೆಯು A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳ ಸೂಚಕಗಳು $(0, b)$ ಮತ್ತು $(a, 0)$ ಆಗಿರುತ್ತವೆ. p (10, 4) ಬಿಂದುವು AB ಯನ್ನು 5 : 4 ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಒಳಗೆ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಆದುದರಿಂದ, ವಿಭಜನಾ ಸೂತ್ರಗಳ ಪ್ರಕಾರ,

$10=\frac{5a+4\cdot 0}{9}$, ಅಥವಾ, $90=5a. \quad \therefore a=18$ ಮತ್ತು

$4=\frac{5\cdot 0+4b}{9}$, ಅಥವಾ, $36=4b. \quad \therefore b=9.$

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ಆಗಿದ್ದರೆ, $a=18, b=9$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$$\frac{x}{18}+\frac{y}{9}=1 \text{ ಅಥವಾ } x+2y=18.$$

(7) x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ 60° ಉಂಟುಮಾಡಿ, $(-3, 4)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣ $y-y_1=m(x-x_1)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇದರಲ್ಲಿ $m=\tan\theta=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\left.\begin{matrix} x_1=-3 \\ y_1=\ \ 4\end{matrix}\right\}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣವು $y-4=\sqrt{3}(x+3)$, ಅಥವಾ. $y-4=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$

ಅಂದರೆ, $y-x\sqrt{3}-(4+3\sqrt{3})=0$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(8) (3, 5) ಮತ್ತು (4, 7) ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣ $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇದರಲ್ಲಿ, $\left.\begin{matrix} x_1=3 \\ y_1=5\end{matrix}\right\}$ ಮತ್ತು $\left.\begin{matrix} x_2=4 \\ y_2=7\end{matrix}\right\}$ ಎಂದು **ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,**

ಆಗ, $\frac{y-5}{x-3}=\frac{7-5}{4-3}=\frac{2}{1}$

$$\therefore\ y-5=2(x-3)=2x-6$$

ಅಂದರೆ, $2x-y-1=0$

(9) $-5x+4y-12=0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಓಟ ಮತ್ತು y – ಅಂತಃಖಂಡ ವುಳ್ಳ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $4y=5x+12$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದರ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಆಗ,

$y=\frac{5}{4}x+3$. ಇದು $y=mx+c\left(m=\frac{5}{4},\ c=3\right)$

ರೂಪದಲ್ಲಿದೆ.

(10) $4x - 15y - 30 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯ x ಮತ್ತು y – ಅಂತಃಖಂಡಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸರ್ವಸಾಮಾನ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x = 0$ ಆದಾಗ y — ಅಂತಃಖಂಡವೂ, $y = 0$ ಆದಾಗ x – ಅಂತಃಖಂಡವೂ ದೊರಕುತ್ತವೆ.

ಆದುದರಿಂದ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ $x = 0$ ಆದಾಗ. $-15y - 30 = 0$

ಅಥವಾ $-15y = 30$ $\therefore$ $y = -2$ ಮತ್ತು $y = 0$ ಆದಾಗ, $4x - 30 = 0$, ಅಥವಾ. $4x = 30$ $\therefore$ $x = 15/2$.

$\therefore$ ಸರಳರೇಖೆಯ x – ಅಂತಃಖಂಡ $15/2$ ಮತ್ತು y – ಅಂತಃಖಂಡ $= -2$.

ಅಭ್ಯಾಸ 2

(1) x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ (i) $30°$, (ii) $45°$ ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಮತ್ತು ಕೆಳಕಂಡ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(5, 6)$, (ii) $(-3, 4)$, (iii) $(-4, -6)$, (iv) $(5, -10)$ (v) (a, b).

(3) ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಓಟಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(3, 5)$, $(5, 7)$; (ii) $(-4, 6)$, $(7, 10)$; (iii) $(-5, -7)$, $(4, 1)$; (iv) $(6, -3)$, $(13, 2)$; (v) $(5, 3)$, $(-7, 6)$; (vi) $(7, 3)$, $(-3, -5)$; (vii) $(6, 4)$, $(9, -2)$; (viii) $(-5, -4)$, $(-4, -5)$; (ix) (a, b), (b, a); (x) $(a \cos x, b \sin x)$, $(b \cos x, a \sin x)$.

(4) ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿಬಂಧನೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $m = \frac{3}{4}$, $c = 2$. (ii) $\theta = 45°$, $c = -5$. (iii) $m = \frac{1}{4}$, $c = -3$

(iv) $m = \frac{5}{4}$, $c = 6$. (v) $\theta = 60°$, $c = 4$ (vi) $a = 4$, $b = 5$.

(vii) $a = -3, b = 6$. (viii) $a = -4, b = -6$ (ix) $a = 5, b = -8$.

(x) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$.

ಸೂಚನೆ: ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ $m =$ ಓಟ, $c = y$ – ಅಂತಃಖಂಡ, $a = x$ – ಅಂತಃಖಂಡ, $b = x$ – ಅಂತಃಖಂಡ ಎಂಬುದಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

(5) y – ಅಕ್ಷದಿಂದ 6 ಮಾನಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ, ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6) x – ಅಕ್ಷದಿಂದ 9 ಮಾನಗಳ ದೂರದಲ್ಲಿ, ಅದಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(7) ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ x ಮತ್ತು y ಅಂತಃಖಂಡಗಳು. (1) ಸಮಾನ ಮತ್ತು ಸಮ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳವು (2) ಸಮಾನ ಮತ್ತು ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳವಾಗಿದ್ದು, ಆ ಸರಳ ರೇಖೆಯು (4, 7) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುತ್ತದೆ; ಆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(8) (3, 5) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ x – ಅಂತಃ ಖಂಡವು y – ಅಂತಃಖಂಡದ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟಿದ್ದರೆ, ಆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(9) x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ 60° ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡಿ, (6, 4) ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(10) x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ 30° ಕೋನವನ್ನು ಮಾಡಿ, (i) (4, 6) (i) (– 5, 3) (iii) (3, – 6) (iv) (– 3, – 5) ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(11) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) (5, 6), (– 3, – 4); (ii) (– 5, – 6), (– 2, – 3);

(iii) (– 4, – 5), (3, 5) (iv) (– 6, 4), (2, 5); (v) (3, 6), (– 4, 8),

(vi) (4, 6), (5, – 8); (vii) (3, 7), (6, 4); (viii) (3, – 5), (4, 7);

(ix) $\left((at_1, \frac{a}{t_1}\right)$, $\left((at_2, \frac{a}{t_2}\right)$; (x) $(a \sin\theta,\ b\cos\theta)$, $(b\sin\theta,\ a\cos\theta)$.

(12) ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣ $6x - 8y - 16 = 0$ ಇದನ್ನು (i) ಓಟ ಮತ್ತು y ಅಂತಃಖಂಡ (ii) x ಮತ್ತು y ಅಂತಃಖಂಡ ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಸಮೀಕರಣದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(13) $5x - 12y + 24 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯ x ಮತ್ತು y ಅಂತಃಖಂಡಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(14) x ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ a ಮತ್ತು b ಅಂತಃಖಂಡಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು $(5, -1)$ ಬಿಂದುವು $3 : 2$ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಒಳಗೆ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(15) $(3, 4)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ಸರಳರೇಖೆಯ x – ಅಂತಃಖಂಡವು -4 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಸರಳರೇಖೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(16) $4x - 3y - 12 = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನುಳ್ಳ ಸರಳರೇಖೆಯ ಓಟ ಮತ್ತು ಅದು y – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಮಾಡುವ ಅಂತಃಖಂಡಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 1

(1) (i) $\sqrt{61}$; (ii) $\sqrt{41}$; (iii) $\sqrt{130}$; (iv) $\sqrt{128}$;

(v) $\sqrt{13}$; (vi) 52 ; (vii) $a - b$; (viii) $\dfrac{a(t_1 - t_2)}{t_1 t_2}\sqrt{1 + t_1^2 t_2^2}$;

(ix) $a\sqrt{2}$; (x) $b - a$.

(2) 8 ; (3) 9 ಅಥವಾ 1 ; (7) $\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{17}{5}\right)$ ಮತ್ತು

(0, 13) ; (8) $\left(\dfrac{9}{8}, \dfrac{47}{8}\right)$ ಮತ್ತು $\left(\dfrac{21}{2}, \dfrac{23}{2}\right)$,

(9) $\left(\dfrac{18}{7}, \dfrac{-19}{7}\right)$ ಮತ್ತು (6, 11) ; (10) $\left(\dfrac{-19}{7}, \dfrac{-43}{7}\right)$

ಮತ್ತು $\left(\dfrac{-11}{3}, -9\right)$

(11) (– 1, 11) ಮತ್ತು (9, 1) ; (12) (6, 6) ;

(13) (5, 8) ; (14) 9 ಚದರ ಮಾನಗಳು.

(15) $22\frac{1}{2}$ ಚದರ ಮಾನಗಳು; (16) $-a^2$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ 2

(1) (i) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; (ii) 1 ;

(2) (i) $\dfrac{6}{5}$; (ii) $\dfrac{-4}{3}$; (iii) $\dfrac{3}{2}$; (iv) – 2 ; (v) $\dfrac{b}{a}$.

(3) (i) 1 ; (ii) $\dfrac{4}{11}$; (iii) $\dfrac{8}{9}$; (iv) $\dfrac{5}{7}$; (v) $-\frac{1}{4}$;

(vi) $\dfrac{4}{5}$; (vii) – 2 ; (viii) – 1 ; (ix) – 1 ;

(x) $-\tan x$

(4) (i) $3x - 4y + 8 = 0$; (ii) $x - y - 5 = 0$;

(iii) $x - 4y - 12 = 0$; (iv) $5x - 4y + 24 = 0$;

(v) $y = \sqrt{3}x + 4$; (vi) $5x + 4y - 20 = 0$;

(vii) $2x - y + 6 = 0$; (viii) $3x + 2y + 12 = 0$;
(ix) $8x - 5y - 40 = 0$; (x) $6x + 4y - 3 = 0$.

(5) $x = 6$; (6) $y = 9$; (7) (i) $x + y - 11 = 0$;
(ii) $x - y + 3 = 0$. (8) $x + 4y - 8 = 0$;

(9) $\sqrt{3}\,x - y + 4 - 6\sqrt{3} = 0$; (10) (i) $y\sqrt{3} = x - 4 + 6\sqrt{3}$;
(ii) $y\sqrt{3} = x + 5 + 3\sqrt{3}$; (iii) $y\sqrt{3} = x - 3 - 6\sqrt{3}$;
(iv) $y\sqrt{3} = x\sqrt{3} + 3 - 5\sqrt{3}$;

(11) (i) $5x - 4y - 1 = 0$; (ii) $x - y - 1 = 0$;
(iii) $10x - 7y + 5 = 0$; (iv) $x - 8y + 38 = 0$;
(v) $2x + 7y - 48 = 0$; (vi) $14x + y - 62 = 0$;
(vii) $x + y - 10 = 0$; (viii) $12x - y - 41 = 0$;
(ix) $x + yt_1t_2 - a(t_1 + t_2) = 0$;
(x) $x \tan\theta + y - b\cos\theta - a\sin\theta\cdot\tan\theta = 0$
ಅಥವಾ $x\sin\theta + y\cos\theta - (a\sin^2\theta + b\cos^2\theta) = 0$.

(12) (i) $y = \frac{3}{4}x$; (ii) $\frac{x}{8/3} + \frac{y}{-2} = 0$;

(13) $\frac{-24}{5}$, 2 ; (14) $3x - 10y - 25 = 0$;

(15) $4x - 7y + 16 = 0$; (16) $\frac{4}{3}$, -4.

ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ

ಅಧ್ಯಾಯ 1

ಭಿನ್ನ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ

1. ಚಾರಿತ್ರಿಕ ಹಿನ್ನೆಲೆ ಮತ್ತು ಪರಮಮಿತಿ

1.1 ಚಾರಿತ್ರಿಕ ಹಿನ್ನೆಲೆ

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬೀಜಗಣಿತ, ರೇಖಾಗಣಿತ ಮುಂತಾದ ವಿಭಾಗಗಳಿಗೆ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಇದೆಯೋ, ಅಷ್ಟೇ ಅಥವಾ ಕೆಲವು ವಿಷಯಗಳಲ್ಲಿ ಅದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರಕ್ಕಿದೆ. ಇದು ವಿಜ್ಞಾನದ ಬಹುತೇಕ ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ತನ್ನ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಂಡಿದೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಚರಿತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಇದು ಬೆಳೆದುಬಂದ ಕಾಲ ಸುಮಾರು ಕ್ರಿ.ಶ. ಹನ್ನೆರಡನೆಯ ಶತಮಾನವೆಂದು ಸ್ಥೂಲವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದಾದರೂ, ಆ ವೇಳೆಗಾಗಲೇ ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು ಇದನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ್ದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಭಾರತೀಯರಲ್ಲಿ ಭಾಸ್ಕರನೆಂಬ ಗಣಿತಜ್ಞನು ಪ್ರಮುಖ. ಈ ವಿಭಾಗದ ಬೆಳವಣಿಗೆಗೆ ಶ್ರಮಿಸಿದ ಪಾಶ್ಚಾತ್ಯರಲ್ಲಿ ಇಂಗ್ಲೆಂಡ್ ದೇಶದ ನ್ಯೂಟನ್ ಮತ್ತು ಜರ್ಮನಿಯ ಲೆಬ್ನಿಟ್ಸ್ ಪ್ರಮುಖರೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ.

ಈ ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಷಯದ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಮೊದಲು, ಕೆಲವು ಮೂಲತತ್ವಗಳ ವಿವೇಚನೆ ಅತ್ಯಗತ್ಯ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ (1) ಸ್ವತಂತ್ರ ಮತ್ತು ಅವಲಂಬಿಕ ಚರಗಳು, (2) ಉತ್ಪನ್ನ, (3) ಪರಮಮಿತಿ, (4) ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಗಳು ಪ್ರಮುಖವಾಗಿದ್ದು ಅವುಗಳನ್ನು ಕುರಿತ ಮುಖ್ಯ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ವಿವೇಚಿಸೋಣ.

1.2 ಸ್ವತಂತ್ರ, ಅವಲಂಬಿತ ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವ ಚರಗಳು

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಥಿರ ಮತ್ತು ಚರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ವಿಭಾಗಿಸುವರೆಂಬುದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತದ ಪರಿಚ್ಛೇದಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೇವೆ.

ಅಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ ಚರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಅವಾಸ್ತವ ಚರಗಳೆಂದೂ ಮತ್ತು ವಾಸ್ತವ ಚರಗಳನ್ನು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರ, ಅವಲಂಬಿತ ಚರಗಳೆಂದೂ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತಾರೆ.

ವಾಸ್ತವ ಚರ : ಒಂದು ನಿಯತ ಬೆಲೆಗಳ ಗಣದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗಳು ವಾಸ್ತವವಾಗಿದ್ದು (Real) ಆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಲ್ಲ ಚರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು **ವಾಸ್ತವ ಚರ ಸಂಖ್ಯೆ**ಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

a, b ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಈ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರಬಹುದಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು a ಯಿಂದ b ವರೆಗೆ ಇರುವ ಅವಕಾಶ ಎಂದು

ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು (a, b) ಎಂದು ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತೇವೆ. ಯಾವುದೇ ಚರಸಂಖ್ಯೆಯು (a, b) ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ ಪಡೆಯಬಹುದಾದರೆ ಆ ಚರಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು **ವಾಸ್ತವ ಚರಸಂಖ್ಯೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

x ಮತ್ತು y ಎಂಬ ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಚರಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬ ಚರವು (a, b) ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳನ್ನೂ, (y ಯಾವ ರೀತಿ ಬೆಲೆ ಪಡೆಯುತ್ತದೆಂಬುದರ ಪರಿಗಣನೆಯಿಲ್ಲದೆ), ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿ ಪಡೆದರೆ ಅದನ್ನು **ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರಸಂಖ್ಯೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ y ಯು (a, b) ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಬೆಲೆ ಪಡೆಯಬೇಕಾದರೂ, x ಹೇಗೆ ಬೆಲೆ ಪಡೆಯುವುದೆಂಬುದರ ಮೇಲೆಯೇ ಅವಲಂಬಿಸಿ ತನ್ನ ಬೆಲೆ ಪಡೆದರೆ, ಅದನ್ನು **ಅವಲಂಬಿತ ಚರಸಂಖ್ಯೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

1.3 ಉತ್ಪನ್ನ (Function)

x ಮತ್ತು y ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಚರಗಳಾಗಿರಲಿ. x ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರವಾಗಿದ್ದು, y, x ನ ಅವಲಂಬಿತ ಚರವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ **y ಅನ್ನು x ನ ಉತ್ಪನ್ನ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ x ನ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ y ನ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದನ್ನು $y = f(x)$ ಎಂಬ ಸಂಜ್ಞೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು **y ಯು f ನ x** ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನ ಮತ್ತು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರಗಳ ಸಂಬಂಧ ಸೂಚಿಸ ಬೇಕಾದರೆ, ಉತ್ಪನ್ನ $= f$ (ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರ) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಉತ್ಪನ್ನ ಮತ್ತು ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರಗಳ ಸಂಬಂಧವು ಸಮೀಕರಣ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, (1) $y = 8x$
(2) $y = 2x^2 + 3$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ x ಗೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆರೋಪಿಸಿ ದಾಗ y ಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆ ಇರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(1) $y = \cos x$ ಆದರೆ, $x = 0, \frac{\pi}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ y ನ **ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

$x = 0$ ಆದಾಗ, $y = \cos(0) = 1$

$x = \frac{\pi}{3}$ ಆದಾಗ, $y = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ, $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

(2) $y = 2x + 3$ ಆದರೆ, $x = 2, \frac{3}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{a^2b}{2}$ ಆದಾಗ y ನ ಬೆಲೆ ಏನು ?

$x = 2$ ಆದಾಗ, $y = 2(2) + 3 = 7$

$x = \frac{3}{2}$ ಆದಾಗ, $y = 2\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 6$

$x = \frac{a^2b}{2}$ ಆದಾಗ, $y = 2\left(\frac{a^2b}{2}\right) + 3 = (a^2b + 3)$

1.4 ಪರಮಮಿತಿ (Limit)

ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುವ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ, y ನ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಆದರೆ, $\left(\frac{x^2 - 9}{x - 3}\right)$ ಎಂಬ x ನ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ x ನ ಬೆಲೆ 3 ಆದಾಗ ಅದರ ಉತ್ಪನ್ನದ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

ಏಕೆಂದರೆ $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

$$\therefore f(3) = \frac{(3)^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

ಇದು **ಅನಿಶ್ಚಿತ** ಅಥವಾ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅಸಾಧ್ಯವಾದ ಬೆ

ಈ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, x ನ ಬೆಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸ. ತೊಡಗಿದಾಗ, ಉತ್ಪನ್ನದ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆ ಏನಾಗುವುದೆಂದು ತಿಳಿಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ:

$x < 3$	$f(x)$	$x > 3$	$f(x)$
2·9	5·9	3·1	6·1
2·99	5·99	3·01	6·01
2·999	5·999	3·001	6·001
2·9999	5·9999	3·0001	6·0001
2·99999	5·99999	3·00001	6·00001

ಈ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದರೆ, x ನ ಬೆಲೆ 3 ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ ಅದರ ಉತ್ಪನ್ನದ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆ 6 ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ x ನ ಬೆಲೆ 3 ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ ಅದರ ಉತ್ಪನ್ನವು $[f(x)]$ ಸಮೀಪಿಸುವ ಬೆಲೆ 6 ನ್ನು **ಉತ್ಪನ್ನದ ಪರಮಮಿತಿ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಈ ರೀತಿಯ ಕಲ್ಪನೆಯು ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದ ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಬಹಳ ಮುಖ್ಯವಾದ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, y ಯು x ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾದಾಗ x ಒಂದು ಆದೇಶಿಸಿದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆಲ್ಲಾ, y ಸಮೀಪಿಸುವ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು, **y ನ ಪರಮಮಿತಿ** ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಆದರೆ, ಉತ್ಪನ್ನದ ಪರಮಮಿತಿ ಯಾವಾಗಲೂ ಅದರ ನಿಜವಾದ ಬೆಲೆ ಆಗಿರ ಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿದಿರಬೇಕು.

ಪರಮಮಿತಿಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳಬಹುದು:

1.5 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: $y = f(x)$ ಆದಾಗ, $|(x-a)|$ ಯ ಅಂತರವನ್ನು ಬಹಳವಾಗಿ ಅಲ್ಪ ಮಾಡುವ ಮೂಲಕ, $|y-L|$ ಬೆಲೆಯ ಅಂತರವನ್ನೂ ನಮಗಿಷ್ಟಬಂದಷ್ಟು ಅಲ್ಪವಾಗಿ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, x, a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ $y = f(x)$ ಯು L ಎನ್ನುವ ಪರಮಮಿತಿಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಂಜ್ಞಾರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} f(x) = L$$

x, a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ $f(x)$ ನ ಪರಮಮಿತಿ L ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

'$x \to a$' ಯನ್ನು 'x, a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ' ಮತ್ತು '$Y \to L$' ಅನ್ನು 'Y, L ಅನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ' ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ. ಪರಮಮಿತಿಯನ್ನು 'ಮಿತಿ' ಎಂಬುದರಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತೇವೆ.

1.6 ಪರಮಮಿತಿಯ ಮೂಲತತ್ವಗಳು

$y = f(x)$ ಆದಾಗ :

(1) x, a ಯನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ $y \to L_1$ ಮತ್ತು $y \to L_2$ ಆದರೆ, $L_1 = L_2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(2) C ಒಂದು ನಿಯತ ಬೆಲೆ ಆಗಿದ್ದು. x ನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $f(x) = C$ ಆದರೆ, $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} f(x) = C$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(3) 'a' ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು, x ನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $f(x) = x$ ಆದರೆ. $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} f(x) = a$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(4) $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$, x ನ ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} f(x) \to L_1$ ಮತ್ತು $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} g(x) \to L_2$ ಆದರೆ,

(*a*) $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$

(*b*) $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$

(*c*) $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{L_1}{L_2}$

(5) a ಮತ್ತು b ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. $f(b)$ ಸಹ ವಾಸ್ತವವಾಗಿದ್ದು, f ಮತ್ತು g ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ,

$$\underset{x \to b}{\text{ಮಿತಿ}} f(x) = f(b) \text{ ಮತ್ತು } \underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} g(x) = b$$

ಆದರೆ, $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} f[g(x)] = f(b)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

(6) n ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು $a > 0$ ಆದರೆ, $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

(7) 5 ಮತ್ತು 6 ನೇ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಒಂದುಗೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ನಿಯಮವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ :

n ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು $L > 0$ ಮತ್ತು $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} f(x) = L$ ಆದರೆ,

$$\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

1.7 ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ (Continuity)

ನಮಗೆ $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} f(x) = L$ ಎಂದರೇನೆಂಬುದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಈಗ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಎಂಬುದರ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಪರಿಚಯ ಪಡೆಯೋಣ.

f ಎಂಬುದು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವೂ ಮತ್ತು a ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಆಗಿರಲಿ.

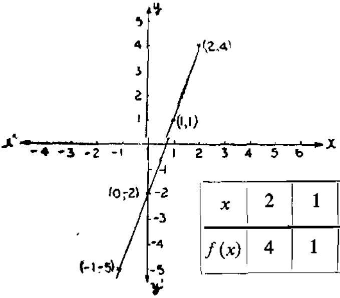
ಈಗ $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} f(x) = f(a)$ ಆಗಿ, $f(a)$ ಯು **ಮೇರೆಯೂ ಗೊತ್ತಾಗಿದ್ದರೆ, $x = a$ ಎಂಬಲ್ಲಿ f ಉತ್ಪನ್ನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದರೆ ನಕ್ಷೆಯು ತುಂಡಾಗದ ರೇಖೆಯಾಗಿ ಮೂಡುತ್ತದೆ.

1.8 ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

$f(x) = 3x - 2$, $y = 5 - 2x + 4x^2$ ಮುಂತಾದವುಗಳೆಲ್ಲವೂ x ನ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ ಖಚಿತ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು **ಮೇರೆ ಗೊತ್ತಾದ ಉತ್ಪನ್ನ**ಗಳೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಎಲ್ಲಾ ಉತ್ಪನ್ನಗಳೂ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿವೆ. ಈಗ $f(x) = 3x - 2$ ಎಂಬುದರ ನಕ್ಷೆ ರಚಿಸೋಣ.



x	2	1	0	-1
$f(x)$	4	1	-2	-5

ಚಿತ್ರ 1

ಮೇಲಿರುವ ಚಿತ್ರದಿಂದ $f(x) = 3x - 2$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯಾಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಉತ್ಪನ್ನವು **ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನ**ವಾಗಿದೆ.

1.9 ಪರಮಮಿತಿಯ ಸೂತ್ರಗಳು

ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬಹಳವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಕೆಲವು ಸೂತ್ರಗಳನ್ನೂ, ಅವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ರೀತಿಯನ್ನೂ ಅಭ್ಯಸಿಸೋಣ. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂರು ಸೂತ್ರಗಳೂ ಬಹಳ ಮುಖ್ಯವಾದುದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಜ್ಞಾಪಕದಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳುವುದು ಒಳ್ಳೆಯದು :

1. $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$

2. $\underset{\theta \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{\sin \theta}{\theta} = 1$

3. $\underset{\theta \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{\tan \theta}{\theta} = 1$

ಸೂತ್ರ (1) : $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ [n ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ]

ಸಾಧನೆ : ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, (*a*) n ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವಾಗ, (*b*) n ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರುವಾಗ, ಮತ್ತು (*c*) n ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿರುವಾಗ ಎಂಬ 3 ಸನ್ನಿವೇಶಗಳು ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸನ್ನಿವೇಶದಲ್ಲೂ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಸಾಧಿಸೋಣ.

(*a*) n ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ :

$\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$ ಯಲ್ಲಿ $x = a$ ಎಂಬ **ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ** $\dfrac{0}{0}$ ಎಂಬ ಅನಿಶ್ಚಿತ ಬೆಲೆ ಬರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} =$

$$\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{(x-a)\ [x^{n-1} + x^{n-2}.a + x^{n-3}.a^2 + \ldots\ldots + a^{n-1}]}{(x-a)}$$

ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು ಮತ್ತು ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳು ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿಲ್ಲದಿದ್ದ ಪಕ್ಷದಲ್ಲೆಲ್ಲಾ $(x - a)$ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಬಹುದು. $x = a$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳು ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು $x \to a$ ಆದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಅಂದರೆ $x \neq a$. ಆದ್ದರಿಂದ $(x - a)$ ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಹಾಕಬಹುದು.

$$\therefore \underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} [x^{n-1} + x^{n-2}.a + x^{n-3}.a^2 + \dots\dots + a^{n-1}]$$

$x \to a$ ಆದಾಗ, $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} [x^{n-1} + x^{n-2}.a + x^{n-3}.a^2 + \dots\dots + a^{n-1}]$ ನಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ಪದದ ಬೆಲೆಯೂ a^{n-1}ಗೆ ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು n ಪದಗಳಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಬಲಪಾರ್ಶ್ವವು na^{n-1}ಗೆ ಸಮವಾಗಿದೆ.

$$\therefore \underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n . a^{n-1} \quad (1)$$

[n ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ]

(b) n ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ :

$n = -m$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು m ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲಿ.

$$\therefore \underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{x^{-m} - a^{-m}}{x - a}$$

ಆದರೆ. $$\frac{x^{-m} - a^{-m}}{x - a} = \frac{\frac{1}{x^m} - \frac{1}{a^m}}{x - a}$$

$$= \frac{\frac{(a^m - x^m)}{x^m a^m}}{(x - a)}$$

$$= -\left(\frac{x^m - a^m}{x - a)}\right) \left(\frac{1}{x^m a^m}\right)$$

$$\therefore \underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \left(\frac{-1}{x^m a^m}\right) \left(\frac{x^m - a^m}{x - a}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{a^{2m}}\right) (m\, a^{m-1})$$

[m ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ]

$$= -m . a^{-m-1}$$

$$\dots\dots \quad m = n$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1} \quad (2)$$

[n ಋಣಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ]

(c) n ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾದಾಗ :

p ಮತ್ತು q ಗಳು ದನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದು, $n = \frac{p}{q}$ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು

$x^{1/q} = Z$ ಮತ್ತು $a^{1/q} = K$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore x = Z^q, \ a = K^q$ ಮತ್ತು $x \to a$ ಆದಂತೆ, $Z \to K$

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^{p/q} - a^{p/q}}{x - a}$$

$$= \lim_{Z \to K} \frac{Z^p - K^p}{Z^q - K^q}$$

$$= \lim_{Z \to K} \left[\frac{Z^p - K^p}{Z - K} \div \frac{Z^q - K^q}{Z - K}\right]$$

$= pK^{p-1} \div qK^{q-1}$ [p ಮತ್ತು q ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದ್ದರಿಂದ]

$$= \frac{p}{q} \times \frac{K^{p-1}}{K^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot K^{p-q}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot a^{\frac{p-q}{q}}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot a^{\frac{p}{q}-1}$$

$$= n \cdot a^{n-1} \quad (3)$$

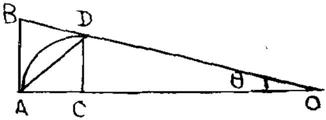
[n ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾದಾಗ]

(1), (2) ಮತ್ತು (3) ನೇ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟುಗೂಡಿಸಿದರೆ, n ಒಂದು ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ,

$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n \cdot a^{n-1}$ ಎಂಬುದು ನೈಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸೂತ್ರ (2) : $\underset{\theta \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

ರಚನೆ : O ವನ್ನು ಕೇಂದ್ರ ಬಿಂದುವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು AD ಎಂಬ ವೃತ್ತಖಂಡವನ್ನು ರಚಿಸಿ, AD, OD, OA ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿ. DC ಯನ್ನು D ಬಿಂದುವಿನಿಂದ OA ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯಿರಿ. A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಖಂಡ AD ಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ AB ಯನ್ನು



ಚಿತ್ರ 2

ಎಳೆದಾಗ, ಅದು ವೃದ್ಧಿಸಿದ OD ಯನ್ನು B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. ಈಗ $\underline{|DOA} = \underline{|BOA} = \theta$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು θ ವನ್ನು ರೇಡಿಯನ್ ಮಾನದಲ್ಲಿ ಅಳೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸಾಧನೆ : $\theta = 0$ ಎಂಬುದನ್ನು $\underset{\theta \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\sin\theta}{\theta}$ ದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ $\frac{0}{0}$ ಎಂಬ ಅನಿಶ್ಚಿತ ಬೆಲೆ ಬರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, θ ವು ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ ಉತ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈಗ ಚಿತ್ರದಿಂದ,

$\triangle$ OAD ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $<$ ವೃತ್ತಖಂಡ $\widehat{OAD}$ ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

$< \triangle$ OAB ಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

$\therefore \frac{1}{2} \cdot OA \cdot CD < \frac{1}{2} \cdot OA^2 \cdot \theta < \frac{1}{2} OA \cdot AB$

$\frac{1}{2} OA^2$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$\frac{CD}{OA} < \theta < \frac{AB}{OA}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ, OA = OD = ವೃತ್ತಖಂಡದ ತ್ರಿಜ್ಯ.

$\therefore \frac{CD}{OD} < \theta < \frac{AB}{OA}$

$\therefore \sin\theta < \theta < \tan\theta$

θ ದ ಅಲ್ಪ ಧನಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆಲ್ಲಾ $\sin\theta$ ಧನಾತ್ಮಕವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಅಸಮತೆಯನ್ನು $\sin\theta$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದರ ವಿಪರ್ಯಾವು,

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

θ ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ $\cos\theta \to 1$

$\frac{\sin\theta}{\theta}$ ವು 1 ಕ್ಕೂ ಮತ್ತು 1 ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತಿರುವ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕೂ ನಡುವೆ ಇದೆ.

$$\therefore \underset{\theta \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

ಸೂತ್ರ (3): $\underset{\theta \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\tan\theta}{\theta}$ ದಲ್ಲಿ $\theta = 0$ **ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ** $\frac{0}{0}$ ಎಂಬ ಅನಿಶ್ಚಿತ ಬೆಲೆ ಬರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ $\theta \to 0$ ಆದಾಗ $\frac{\tan\theta}{\theta}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$\underset{\theta \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\tan\theta}{t} = \underset{\theta \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= 1 \cdot 1 \qquad [\because \cos\theta = 1]$$

$$= 1$$

$$\therefore \underset{\theta \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1.$$

ಅಭ್ಯಾಸ 1

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ

(1) $\underset{x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$; (2) $\underset{x \to 2}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$

(3) $\underset{x \to 5}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$; (4) $\underset{x \to 3}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$

(5) $\underset{x \to 7}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{x^{7/2} - 7^{7/2}}{x - 7}$; (6) $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

(7) $\underset{x \to 4}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{x^3 - 64}{x - 4}$; (8) $\underset{x \to 1}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

(9) $\underset{x \to 1}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 - 1}$; (10) $\underset{x \to \sqrt{5}}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{x^4 - 25}{x - \sqrt{5}}$

(11) $\underset{x \to 2}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{\sqrt[3]{x^5} - \sqrt[3]{32}}{x - 2}$; (12) $\underset{x \to 1}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

(13) $\underset{x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}}$; (14) $\underset{x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x^2 + 3x}$

(15) $\underset{x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{\sqrt{3 + 2x} - \sqrt{3 - 2x}}{x}$; (16) $\underset{x \to \infty}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{x^2 + x + 1}{2x^2 - 3x - 1}$

(17) $\underset{x \to \infty}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{3x^5 + x - 3}{x^6 + x^3 + 1}$; (18) $\underset{x \to \infty}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{5x^3 - 3x + 2}{2 - 3x - x^3}$

(19) $\underset{x \to \infty}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{x^4 + \sqrt{x} - 1}{5x^4 - \sqrt{x} + 1}$; (20) $\underset{x \to \infty}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{1 - 4x + 5x^2}$

(21) $\underset{x \to \infty}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{2x - 1}{2x + 1}$; (22) $\underset{n \to \infty}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{(3n + 1)\,(2n + 3)}{(n + 1)\,(4n + 5)}$

(23) $\underset{n \to \infty}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}$;

(24) $\underset{n \to \infty}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}$

(25) $\underset{\theta \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{5\theta}{\sin 2\theta}$; (26) $\underset{\theta \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{\tan m\theta}{\theta}$

(27) $\underset{\theta \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{\sin m\theta}{\sin n\theta}$; (28) $\underset{x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{\sin mx}{\tan mx}$

(29) $\underset{x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{\tan 5x}{\tan 7x}$; (30) $\underset{x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} 5x \cdot \operatorname{cosec} 3x$

(31) $\underset{\theta \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \theta \cdot \cot \theta$; (32) $\underset{\theta \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \theta^2 \cot \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta.$

ಅಧ್ಯಾಯ 2

ಭಿನ್ನ ಕಲನಕ್ರಿಯೆ

(DIFFERENTIATION)

2.1 ಪರಮಮಿತಿಯ ಕಲ್ಪನೆ ಕಲನಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಂಗವಾಗಿದೆ. $y = f(x)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ x ಗೆ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿ ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಹೊಸ ವಿಧವಾದ ಪರಿಕರ್ಮ ನಡೆಸುವುದರಿಂದ ಹೊಸ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಈ ಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ ಬರುವ ಉತ್ಪನ್ನದ ಪರಮಮಿತಿಯನ್ನು ಅದರ ಸ್ವತಂತ್ರ ಚರವು ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನದ, **ನಿಷ್ಪನ್ನ** ಅಥವಾ **ಕಲನಾಂಕ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು $f^1(x)$ D $f(x)$. $\frac{dy}{dx}$ y_1, ಅಥವಾ y^1 ಎಂಬುದರಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಡೆಸಿ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಪರಿಕರ್ಮಕ್ಕೆ **ಭಿನ್ನ ಕಲನಕ್ರಿಯೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

2.2 ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿಧಾನ

x ಎಂಬ ಪರಿಮಾಣಕ್ಕೆ ಅತ್ಯಲ್ಪ ಪರಿಮಾಣ δx ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಆ ಪರಿಮಾಣದ ಬೆಲೆಯು ವ್ಯತ್ಯಸ್ತಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು x ಪರಿಮಾಣದಲ್ಲಿ ಆಗಿರುವ **ವೃದ್ಧಿ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

y, x ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ. ಅದರ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆಯೂ ವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿ $y + \delta y$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, x ಪರಿಮಾಣವು δx ನಿಂದ ವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿದಾಗ, ಅದರ ಉತ್ಪನ್ನ y, δy ನಿಂದ ವೃದ್ಧಿಹೊಂದುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, δx ಅತ್ಯಲ್ಪವಾಗಿದ್ದಂತೆಲ್ಲಾ δy ಕೂಡ ಅತ್ಯಲ್ಪವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರತಿ δx ಬೆಲೆಗೂ δy ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ. δy. δx ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ.

ಇಲ್ಲಿ. $\frac{\delta y}{\delta x}$ ಅನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿ (Incrementary ratio) ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

$\underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta y}{\delta x}$ ಅನ್ನು ನಾವು $\frac{dy}{dx}$, $Df(x)$ **ಅಥವಾ** $f^1(x)$ ಎಂಬ **ಸಂಕೇತ ಗಳಿಂದ** ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಸಂಕೇತಗಳಲ್ಲಿ $\frac{d}{dx}$ ಮತ್ತು D ಇವುಗಳನ್ನು **ಕ್ರಿಯಾಸೂಚಿ (Operator) ಗಳೆಂದು** ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಇಂತಹ $\frac{\delta y}{\delta x}$ ನ ಪರಮಮಿತಿಯನ್ನು **ನಿಷ್ಪನ್ನ** ಅಥವಾ **ಭಿನ್ನ ಕಲನಾಂಕ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಿಷ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಹೇಳಬಹುದು:

2.3 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ $y = f(x)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದಲ್ಲಿ, δx, x ನ ವೃದ್ಧಿಯೂ ಮತ್ತು δy, y ನ ಸಹವೃದ್ಧಿಯೂ ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ $\frac{\delta y}{\delta x}$ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗೆ $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪರಮಮಿತಿ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಮಿತಿಗೆ **ನಿಷ್ಪನ್ನ** ಎಂದು ಹೆಸರು.

2.4 $y = f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲತತ್ವಗಳಿಂದ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ರೀತಿ

x ಪರಿಮಾಣವು δx ಎಂಬ ಅಲ್ಪ ಪರಿಮಾಣದಿಂದ ವೃದ್ಧಿಹೊಂದಲಿ. ಆಗ y ಯೂ 'δy' ಎಂಬ ಸಹ ಅಲ್ಪ ಪರಿಮಾಣದಿಂದ ವೃದ್ಧಿಹೊಂದುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ y + \delta y = f(x + \delta x)$$

$$\therefore\ \delta y = f(x + \delta x) - y$$

$$= f(x + \delta x) - f(x) \qquad (1)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳನ್ನೂ δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ **ಅನಂತರ** $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ ಅದರ ಪರಮಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

ಆದರೆ, ನಿಷ್ಪನ್ನದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು **ಭಿನ್ನ ಕಲನಕ್ರಿಯೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

2.5 ಭಿನ್ನ ಕಲನಕ್ರಿಯೆ ನಡೆಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ವಿವರಿಸಬಹುದು

1. ಮೊದಲು ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಅತ್ಯಲ್ಪ ಪರಿಮಾಣದಿಂದ ವೃದ್ಧಿಗೊಳಿಸಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ : $y = f(x)$ ನಲ್ಲಿ δx. x ನ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು δy. y ನ ಸಹ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ.

$$y + \delta y = f(x + \delta x).$$

2. ವೃದ್ಧಿಹೊಂದಿದ ಉತ್ಪನ್ನದಿಂದ ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಳೆಯಿರಿ.

ಉದಾಹರಣೆ : $[y + \delta y = f(x + \delta x)] - [y = f(x)]$

$$= [\delta y = f(x + \delta x) - f(x)]$$

$$\therefore\ \delta y = f(x + \delta x) - f(x)$$

3. $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡೂ δx ಪದವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದರೆ, $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ. ನಿಷ್ಪತ್ತಿಯ ಪರಮಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಪರಮಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಮೊದಲು $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ ನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿ. δx. ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡರಲ್ಲೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ, ಅದನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಲೂಬಹುದು ಅಥವಾ ಹಾಗೆಯೇ ಪರಮಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

5. $\underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \dfrac{\delta y}{\delta x}$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದಾಗ, ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವು ಬರುತ್ತದೆ.

2.6 ಈಗ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯವಾದ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮೂಲತತ್ವಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ :

(1) x^n [n ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ]

$y = x^n$ ಆಗಿರಲಿ.

δx, x ನ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು δy, y ನ ಸಹ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ. ಆಗ ಉತ್ಪನ್ನವು.

$y + \delta y = (x + \delta x)^n$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $\delta y = (x + \delta x)^n - x^n$

δx ನಿಂದ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳನ್ನೂ ಭಾಗಿಸಿದರೆ

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{\delta x}$$

$$= \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{(x+\delta x) - x}$$

n ಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ, $\underset{x \to a}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಅದೇರೀತಿ, $\underset{(x+\delta x) \to x}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{(x+\delta x) - x} = nx^{n-1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{(x+\delta x) - x}$$

$$= \underset{(x+\delta x) \to x}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{(x+\delta x)^n - x^n}{(x+\delta x) - x}$$

$$= nx^{n-1}$$

$\therefore$ $y = x^n$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನ $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

ಇದನ್ನು $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

(2) $\sin x$

$y = \sin x$ ಆಗಿರಲಿ.

δx, x ನ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು δy, y ನ ಸಹ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $y + \delta y = \sin(x + \delta x)$

$\therefore \delta y = \sin(x + \delta x) - \sin x$

δx ನಿಂದ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳನ್ನೂ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sin(x+\delta x) - \sin x}{\delta x}$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ, $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2\cos\left[\frac{x+\delta x+x}{2}\right] . \sin\left[\frac{x+\delta x-x}{2}\right]}{\delta x}$$

$$= \frac{\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\delta x}{2}\right)}$$

$$= \cos x \cdot 1$$

$$= \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

(3) $\cos x$

$y = \cos x$ ಆಗಿರಲಿ.

δx, xನ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು δy, yನ ಸಹ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $y + \delta y = \cos(x + \delta x)$

$$\therefore \delta y = \cos(x+\delta x) - \cos x$$

ಆದರೆ, $\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \sin\frac{B-A}{2}$

$$\therefore \delta y = 2\sin\left(\frac{x+\delta x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-x-\delta x}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\left(-\frac{\delta x}{2}\right)$$

$$= -2\sin\left[x+\frac{\delta x}{2}\right]\sin\left[\frac{\delta x}{2}\right]$$

ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳನ್ನೂ δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ **ಪರಮಮಿತಿ**ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \left\{ \frac{-2 \sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\delta x} \right\}$$

$$= - \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\delta x}{2}\right)}$$

$$= - \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) . \frac{\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\delta x}{2}\right)}$$

$$= -\sin x . 1$$

$$= -\sin x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

(4) $\tan x$

$y = \tan x$ ಆಗಿರಲಿ.

δx, x ನ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು δy, y ನ ಸಹ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $y + \delta y = \tan(x + \delta x)$

$$\therefore \delta y = \tan(x + \delta x) - \tan x$$

ಆದರೆ, $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

ಮತ್ತು $\tan \delta x = \tan(x + \delta x - x)$

$$= \frac{\tan(x + \delta x) - \tan x}{1 + \tan(x + \delta x) \tan x}$$

ಅಂದರೆ, $\tan(x + \delta x) - \tan x = \tan \delta x \; \{1 + \tan(x + \delta x) \tan x\}$

$$\therefore \delta y = \tan \delta x \{1 + \tan(x + \delta x) \tan x\}$$

ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳನ್ನೂ δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ, ಪರಮಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿ!

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \left(\frac{\tan \delta x}{\delta x}\right) \cdot [1 + \tan (x + \delta x) \tan x]$$

$$= 1 \cdot [1 + \tan x \cdot \tan x]$$

$$= 1 + \tan^2 x$$

$$= \sec^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x.$$

(5) $\cot x$

$y = \cot x$ ಆಗಿರಲಿ.

δx, xನ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು δy, yನ ಸಹ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $y + \delta y = \cot (x + \delta x)$

$$\therefore \delta y = \cot (x + \delta x) - \cot x$$

ಆದರೆ,

$$\cot (x + \delta x) - \cot x = \frac{\cos (x + \delta x)}{\sin (x + \delta x)} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x \cos (x + \delta x) - \cos x \sin (x + \delta x)}{\sin (x + \delta x) \cdot \sin x}$$

$$= - \left[\frac{\sin (x + \delta x) \cdot \cos x - \cos (x + \delta x) \sin x}{\sin x \cdot \sin (x + \delta x)}\right]$$

$$= - \frac{\sin (x + \delta x - x)}{\sin x \cdot \sin (x + \delta x)}$$

$$= - \frac{\sin (\delta x)}{\sin x \cdot \sin (x + \delta x)}$$

$$\therefore \delta y = - \frac{\sin \delta x}{\sin x \cdot \sin (x + \delta x)}$$

δx ನಿಂದ ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳನ್ನೂ ಭಾಗಿಸಿ, $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ **ಪರಮಮಿತಿಯನ್ನು** ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta y}{\delta x} = -\underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \left[\frac{\sin \delta x}{\delta x} \cdot \frac{1}{\sin x . \sin (x + \delta x)}\right]$$

$$= -1 \cdot \frac{1}{\sin x . \sin x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

(6) $\sec x$

$y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ ಆಗಿರಲಿ.

δx, xನ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು δy, yನ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $y + \delta y = \dfrac{1}{\cos (x + \delta x)}$

$$\therefore \delta y = \frac{1}{\cos (x + \delta x)} - \frac{1}{\cos x}$$

ಆದರೆ, $\dfrac{1}{\cos (x + \delta x)} - \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\cos x - \cos (x + \delta x)}{\cos x . \cos (x + \delta x)}$

$$= \frac{2 \sin \left(\frac{x + \delta x + x}{2}\right) \sin \left(\frac{x - x - \delta x}{2}\right)}{\cos x . \cos (x + \delta x)}$$

$$= \frac{2 \sin \left(x + \frac{\delta x}{2}\right) \sin \left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\cos x \cdot \cos (x + \delta x)}$$

$$\therefore \delta y = \frac{2 \sin \left(x + \frac{\delta x}{2}\right) \sin \left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\cos x \cdot \cos (x + \delta x)}$$

ಎರಡೂ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳನ್ನೂ δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ ಪರಮಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{2\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\cos x \cos(x+\delta x).\delta x}$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \left[\frac{\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}{\cos x.\cos(x+\delta x)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\delta x}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x.\cos x}\cdot 1$$

$$= \tan x.\sec x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x.\tan x$$

(7) $\operatorname{cosec} x$

$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ ಆಗಿರಲಿ.

δx, x ನ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು δy, y ನ ಸಹ ಅತ್ಯಲ್ಪ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $y + \delta y = \frac{1}{\sin(x+\delta x)}$

$$\therefore \delta y = \frac{1}{\sin(x+\delta x)} - \frac{1}{\sin x}$$

ಆದರೆ, $\frac{1}{\sin(x+\delta x)} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - \sin(x+\delta x)}{\sin(x+\delta x).\sin x}$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{x+x+\delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-x-\delta x}{2}\right)}{\sin(x+\delta x).\sin x}$$

$$= \frac{-2.\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\sin(x+\delta x).\sin x}$$

$$\therefore \delta y = \frac{-2\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\sin(x+\delta x).\sin x}$$

ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳನ್ನೂ δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $\delta y \to 0$ ಆದಾಗ ಪರಮಮಿತಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \left[\frac{-2\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\delta x \cdot \sin(x + \delta x)\cdot \sin x} \right]$$

$$= -\underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \left[\frac{\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)}{\sin(x + \delta x)\sin x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\delta x}{2}\right)} \right]$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin x \cdot \sin x} \cdot 1$$

$$= -\cot x \cdot \operatorname{cosec} x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$$

2.7 ಭಿನ್ನ ಕಲನಕ್ರಿಯೆಯ ಪ್ರಮೇಯಗಳು

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿದ್ದ ಕ್ರಮವನ್ನು **ಮೂಲತತ್ವಗಳಿಂದ ಭಿನ್ನ ಕಲನಕ್ರಮ** ಅಥವಾ **ಐದ· ಶ್ರೇಣಿಯ ತತ್ವ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಆದರೆ ಈ ಕ್ರಮವು ಸುಲಭ ಭಿನ್ನ ಕಲನಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲು ಮಾತ್ರ ಯೋಗ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಈಗ ನಾವು ಭಿನ್ನ ಕಲನಕ್ರಿಯೆಯ ಕೆಲವು ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕ್ಲಿಷ್ಟ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದು.

2.8 ಪ್ರಮೇಯಗಳು

ಪ್ರಮೇಯ 1 : ನಿಯತಾಂಕ ಅಥವಾ ಸ್ಥಿರದ ನಿಷ್ಪನ್ನವು ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮ ನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $y = C$ ಆದರೆ, $\frac{dy}{dx} = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. [C = ನಿಯತಾಂಕ ಅಥವಾ ಸ್ಥಿರ]

ಸಾಧನೆ: $y = C$ [ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನ]

x ಪರಿಮಾಣವು δx ಅಲ್ಪ ಪರಿಮಾಣದಿಂದ ವೃದ್ಧಿಹೊಂದಲಿ. ಆಗ y ಯೂ δy ಎಂಬ ಸಹ ಅಲ್ಪ ಪರಿಮಾಣದಿಂದ ವೃದ್ಧಿಹೊಂದುತ್ತದೆ.

$\therefore\ y + \delta y = c$ [c ನಿಯತಾಂಕವಾದ್ದರಿಂದ, ಅದು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ]

ಅಂದರೆ, $\delta y = c - y$
$= c - c$
$= 0$

ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳನ್ನೂ δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ. $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ ಅದರ ಪರಮಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} 0 = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$$

ಅಂದರೆ $\frac{d}{dx}$ (ನಿಯತಾಂಕ) $= 0$

ಪ್ರಮೇಯ 2 : c ನಿಯತಾಂಕವೂ, u. x ನ ಉತ್ಪನ್ನವೂ **ಆಗಿರುವಾಗ** $y = cu$ ಆದರೆ, ಅದರ ನಿಷ್ಪನ್ನ $\frac{dy}{dx}$, $c \cdot \frac{du}{dx}$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : $y = cu$ [ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನ]

δx. x ನ ಚರ ವೃದ್ಧಿಯಾದರೆ, ಅದರ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾದ y ಮತ್ತು u ಗಳೂ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ δy ಮತ್ತು δu ಎಂಬ ಸಹ ವೃದ್ಧಿಗಳಿಂದ ವೃದ್ಧಿಹೊಂದುತ್ತವೆ.

$$\therefore y + \delta y = c(u + \delta u)$$
$$\therefore \delta y = c(u + \delta u) - y$$
$$= c(u + \delta u) - cu$$
$$= c.\delta u$$

ಎರಡು ಪಾರ್ಶ್ವಗಳನ್ನೂ δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ ಅದರ ಪರಮಮಿತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} c \cdot \frac{\delta u}{\delta x}$$
$$= c \cdot \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta u}{\delta x}$$
$$= c \cdot \frac{du}{dx}$$
$$\therefore \frac{d}{dx}(c \cdot u) = c \cdot \frac{du}{dx}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $3 \operatorname{cosec} x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು **ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

$y = 3 \operatorname{cosec} x$ ಆಗಿರಲಿ.

ಇಲ್ಲಿ 3 ನಿಯತಾಂಕ ಮತ್ತು $\operatorname{cosec} x$, x ನ ಉತ್ಪನ್ನ.
ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲೆ ಸಾಧಿಸಿರುವ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3 \operatorname{cosec} x)$$

$$= 3 \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)$$

$$= 3 \cdot (-\operatorname{cosec} x . \cot x)$$

$$= -3 \operatorname{cosec} x \cdot \cot x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(3 \operatorname{cosec} x) = -3 \operatorname{cosec} x \cdot \cot x$$

(2) $a^2 \tan x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವೇನು ?

ಇಲ್ಲಿ a^2 ನಿಯತಾಂಕ ಮತ್ತು $\tan^2 x$, xನ ಉತ್ಪನ್ನ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಂತೆ,

$$\frac{d}{dx}(a^2 \tan^2 x) = a^2 \cdot \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= a^2 (\sec^2 x)$$

$$= a^2 \sec^2 x.$$

ಪ್ರಮೇಯ 3 : u ಮತ್ತು v ಎಂಬ xನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವು y ಎಂಬ x ನ ಇನ್ನೊಂದು ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ, y ನಿಷ್ಪನ್ನವು, u, v ಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : $y = u + v$ [ದತ್ತ ಉತ್ಪನ್ನ]

ಈಗ, x ನ ವೃದ್ಧಿ δx ಆಗಿರಲಿ. u, v ಮತ್ತು y ಗಳ ಸಹವೃದ್ಧಿಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ δu, δv ಮತ್ತು δy ಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $y + \delta y = (u + \delta u) + (v + \delta v)$

ಅಂದರೆ, $\delta y = \{(u + \delta u) + (v + \delta v)\} - y$

$$= \{(u + \delta u) + (v + \delta v)\} - (u + v)$$

$$\therefore \delta y = \delta u + \delta v$$

ಎರಡೂ ಕಡೆಗಳನ್ನೂ δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ ಅವುಗಳ ಪರಮಮಿತಿ ಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \left[\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x}\right]$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta u}{\delta x} + \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta v}{\delta x}$$

$$= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore\ y' = u' + v'$$

ನಿಯಮ 4 : ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ನಿಷ್ಪನ್ನವು ಮೊದಲನೆಯ ಉತ್ಪನ್ನ ಹಾಗೂ ಎರಡನೆಯ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಉತ್ಪನ್ನ ಹಾಗೂ ಮೊದಲನೆಯ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಗುಣಲಬ್ಧ, ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, u ಮತ್ತು v ಗಳು x ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾದಾಗ.

$$y = uv \text{ ಆದರೆ, } \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

ಸಾಧನೆ: $y = uv$ [ದತ್ತ]

x ನ ವೃದ್ಧಿ δx ಆಗಿರಲಿ, u, v ಮತ್ತು y ಗಳ ಸಹ ವೃದ್ಧಿಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ δu, δv ಮತ್ತು δy ಗಳಾಗಿರಲಿ.

$$\therefore\ y + \delta y = (u + \delta u)(v + \delta v)$$

$$\delta y = (u + \delta u)(v + \delta v) - y$$

$$= uv + u \cdot \delta v + v \cdot \delta u + \delta u \cdot \delta v - uv$$

$$= u \cdot \delta v + v \cdot \delta u + \delta u \cdot \delta v$$

ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನೂ δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಪರಮಮಿತಿಯನ್ನು $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \left[u \cdot \frac{\delta v}{\delta x} + v \cdot \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u \cdot \delta v}{\delta x}\right]$$

$$= \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}}\ u \cdot \frac{\delta v}{\delta x} + \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}}\ v \cdot \frac{\delta u}{\delta x} + \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta u \cdot \delta v}{\delta x}$$

ಇಲ್ಲಿ ಬಲಪಾರ್ಶ್ವದ ಅಂತ್ಯ ಪದವನ್ನು $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ ಸ್ವಲ್ಪ ವಿವೇಚಿಸೋಣ.

$\delta x \to 0$ ಆದಾಗ, $\frac{\delta v}{\delta x} \to v^1$. ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ, ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವು ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಆ ಉತ್ಪನ್ನವು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, x ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾದ u, $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ ಅವಿಚ್ಛಿನ ವಾಗಿದೆ.

$\therefore\ \delta x \to 0$ ಆದಾಗ $\delta u \to 0$

ಆದ್ದರಿಂದ ಬಲಪಾರ್ಶ್ವದ ಅಂತ್ಯ ಪದವು $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ, $o . v^1 = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + o \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $x . \operatorname{cosec} x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು x ನ **ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

$y = x . \operatorname{cosec} x$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x . \operatorname{cosec} x)$$

$$= x \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) + \operatorname{cosec} x \cdot \frac{d}{dx}(x)$$

.... [ಪ್ರಮೇಯ 4 ರಿಂದ]

$$= x(-\operatorname{cosec} x . \cot x) + \operatorname{cosec} x . 1$$

$$= -x . \operatorname{cosec} x . \cot x + \operatorname{cosec} x$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(x . \operatorname{cosec} x) = -x . \operatorname{cosec} x . \cot x + \operatorname{cosec} x$$

(2) $\tan x . \sec x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = \tan x . \sec x$ ಇರಲಿ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan x . \sec x)$$

$$= \tan x \cdot \frac{d}{dx}(\sec x) + \sec x \cdot \frac{d}{dx}(\tan x)$$

......[ಪ್ರಮೇಯ 4 ರಿಂದ]

$$= \tan x . \sec x . \tan x + \sec x . \sec^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan x . \sec x) = \sec x [\tan^2 x + \sec^2 x]$$

ಪ್ರಮೇಯ 4 ರ ವಿಸ್ತರಣೆ: $y = uvw$. ಇರಲಿ ಮತ್ತು u, v, w ಗಳು x ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $$\frac{dy}{dx} = uv \cdot \frac{dw}{dx} + w\left[\frac{d}{dx}(uv)\right]$$

$$= uv \cdot \frac{dw}{dx} + w\left[u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}\right]$$

$$= uv \cdot \frac{dw}{dx} + w \cdot u \cdot \frac{dv}{dx} + wv\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[u \cdot v \cdot w] = uv\frac{dw}{dx} + vw \cdot \frac{du}{dx} + wu \cdot \frac{dv}{dx}$$

ಅಥವಾ $$\frac{d}{dx}[u \cdot v \cdot w] = uv \cdot w' + vw \cdot u' + wu \cdot v'$$

ಇದೇ ರೀತಿ ಪ್ರಮೇಯ 4 ನ್ನು, ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿದ್ದಾಗ ತಕ್ಕಂತೆ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ: $x . \operatorname{cosec} x . \cot x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = x . \operatorname{cosec} x . \cot x$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\frac{dy}{dx} = x . \operatorname{cosec} x \cdot \frac{d}{dx}(\cot x) + \operatorname{cosec} xc . ot\, x \frac{d}{dx}(x) + x . \cot x \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)$$

$$= x \cdot \operatorname{cosec} x . (-\operatorname{cosec}^2 x) + \operatorname{cosec} x . \cot x . 1 + x . \cot x \cdot (-\operatorname{cosec} x . \cot x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x . \operatorname{cosec} x . \cot x) = \operatorname{cosec} x [-x . \operatorname{cosec}^2 x + \cot x - x \cot^2 x]$$

ಪ್ರಮೇಯ 5 (ಭಾಗಾಹಾರ ನಿಯಮ): ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ನಿಷ್ಪನ್ನವು, ಛೇದ ಹಾಗೂ ಅಂಶದ ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಂಶ ಹಾಗೂ ಛೇದದ ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಗುಣಲಬ್ಧ ಇವುಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು ಛೇದದ ವರ್ಗದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಬರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ: u ಮತ್ತು v ಗಳು x ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು

$$y = \frac{u}{v} \text{ ಆಗಿರಲಿ.}$$

ನಾವು, $$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$ **ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.**

ಈಗ, $$y = \frac{u}{v} \text{ (ದತ್ತ)}$$

δx, x ನ ವೃದ್ಧಿಯಾಗಿರಲಿ. u, v ಮತ್ತು y **ಗಳ ಸಹವೃದ್ಧಿಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ** $\delta u, \delta v$ ಮತ್ತು δy ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $$y + \delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v}$$

$$\therefore \delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v} - y$$

$$= \frac{u + \delta u}{v + \delta v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{v(u + \delta u) - u(v + \delta v)}{v(v + \delta v)}$$

$$= \frac{v\,\delta u - u\,\delta v}{v(v + \delta v)}$$

ಎರಡು ಕಡೆಗಳನ್ನೂ δx ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v\cdot\delta u - u\cdot\delta v}{\delta x\cdot v(v + \delta v)}$$

$$= \frac{v\cdot\frac{\delta u}{\delta x} - u\cdot\frac{\delta v}{\delta x}}{v(v + \delta v)}$$

ಎರಡು ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ ಮಿತಿಯನ್ನು $\delta x \to 0$ ಆದಾಗ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$\underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \left[\frac{v \cdot \frac{\delta u}{\delta x} - u \cdot \frac{\delta v}{\delta x}}{v(v + \delta v)} \right]$$

ಮಿತಿಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v(v+0)} \quad \left[\because \delta v, \delta x \text{ ನ್ನು ಹೊಂದಿಕೊಂಡಿರುವುದರಿಂದ, } \delta x \to 0 \text{ ಆದಾಗ } \delta v \to 0 \text{ ಆಗುತ್ತದೆ.} \right]$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

ಅಥವಾ $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot u^1 - u \cdot v^1}{v^2}$

ಅಂದರೆ, ಭಾಗಲಬ್ಧದ ನಿಷ್ಪನ್ನ $= \dfrac{\text{ಛೇದ} \times \text{ಅಂಶದ ನಿಷ್ಪನ್ನ} - \text{ಅಂಶ} \times \text{ಛೇದದ ನಿಷ್ಪನ್ನ}}{(\text{ಛೇದ})^2}$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $\tan x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಭಾಗಾಹಾರ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

$y = \tan x$ ಇರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

ಭಾಗಾಹಾರ ನಿಯಮದಿಂದ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

(2) $\frac{x \sin x}{x^2+1}$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = \frac{x \sin x}{x^2+1}$ ಇರಲಿ

ಭಾಗಾಹಾರ ನಿಯಮದಿಂದ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)\cdot\frac{d}{dx}(x \sin x) - x \sin x \cdot \frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1)\left[x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \cdot \frac{d}{dx}(x)\right] - x \sin x \cdot \frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1)[x \cdot \cos x + \sin x \cdot 1] - x \sin x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x \cdot (x^2+1)\cos x + (x^2+1)\cdot \sin x - 2x^2 \sin x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x(x^2+1)\cos x + (1-x^2)\sin x}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{x \sin x}{x^2+1}\right) = \frac{x(x^2+1)\cos x + (1-x^2)\sin x}{(x^2+1)^2}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 2

I. ಮೂಲ ತತ್ವದಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ :

(1) x, (2) x^3, (3) (x^2+2x), (4) $\sqrt{x}$. (5) $x\sqrt{x}$, (6) $\sin 2x$, (7) $\cos 2x$,

(8) x^4, (9) $\sqrt{x^3+2}$, (10) $(x+1)^2$, (11) $\frac{1}{x^2}$, (12) x^3+3x-1

II. ಇವುಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(1) $ax^2 + bx + c$; (2) $x^4 + x^2 + 2$; (3) $3x^2 + \sqrt{x^2} + 1$;
(4) $x^5 - 7x + 6$; (5) $\sqrt{x^3} + 5x^2 + 3$; (6) $x^6 + x^3 + x + 2$;
(7) $x^{12} + 3x^7 - 4x^3 + 8$; (8) $(\sqrt{2} - \sqrt{3x})^3$; (9) $x^n - \dfrac{1}{\sin x}$;
(10) $3\sin x + 4x + 7$; (11) $4\operatorname{cosec} x + 7\cot x + 5\cos x + 6$
(12) $3x^2 - 4\cos x + \sin x + 2$

III. (1) $(x+5)(x^2 - 7x + 3)$; (2) $(x^2 - 3)(x^4 - 5x + 7)$
(3) $(x^7 - 7x)(x+2)^2$; (4) $(x^2 + 1)(\sqrt{x+1})$
(5) $(x^{12} - 1)(x + 1)$; (6) $(x+2)(x+3)(x+4)$
(7) $(x^2 - 2)(3x^4 + 2)(7x - 5)$; (8) $(x+5)(3x+7)^2$
(9) $x^2 \tan x$; (10) $x^3 \operatorname{cosec} x$
(11) $(x^2 + 1)(3\sin x - 4\cos x)$; (12) $(2 + x)\sec x$
(13) $x^2 \cot x + 3x \operatorname{cosec} x - 5x$;
(14) $\sin x . \cos x . \operatorname{cosec} x$;
(15) $\sec^2 x . (1 + \cot^2 x) . \tan^2 x . \cos^4 x$
(16) $x^2 . \sin x . \cos x$; (17) $x^3 \sec x . \operatorname{cosec} x$ (18) $\cos^3 x$.

IV. (1) $\dfrac{1+x}{1-x}$; (2) $\dfrac{x^2 + 3x + 1}{x - 1}$; (3) $\dfrac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$

(4) $\dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$; (5) $\dfrac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$; (6) $\dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 + 3x + 2}$

(7) $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$; (8) $\dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$; (9) $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

(10) $\dfrac{\tan x + \cot x}{\tan x - \cot x}$; (11) $\dfrac{4\sin x + 2}{4\sin x - 2}$; (12) $\dfrac{7 - \operatorname{cosec} x}{7 + \operatorname{cosec} x}$

(13) $\dfrac{\cos x + 1}{\cos x}$; (14) $\dfrac{\cos x + 1}{\sin x}$; (15) $\dfrac{ax^2 + bx + c}{ax^2 + bx - c}$

(16) $\dfrac{x^3 - 1}{\cos x}$; (17) $\dfrac{\operatorname{cosec} x \cdot \tan x}{\sec x \cdot \cot x}$; (18) $\dfrac{3\sec x + 7}{3\sec x - 7}$

V. (1) $\dfrac{x \sin x}{x^2 + 1}$; (2) $\dfrac{(x^3 + 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)}$

(3) $\dfrac{x^2 \tan x}{x^2 - 1}$; (4) $\dfrac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x + 1)^2}$

(5) $\dfrac{x \cos x}{x + 1}$; (6) $\dfrac{x^2 \sec x}{3 - x}$

(7) $\dfrac{(x + 1) \cot x}{\tan x - \cot x}$; (8) $\dfrac{x^2 \operatorname{cosec} x}{x^2 + 1}$

ಅಧ್ಯಾಯ 3

ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನ ಮತ್ತು ವಿಪರ್ಯಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

3.1 ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನ

y ಯು u ವಿನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ; u, xನ ಉತ್ಪನ್ನವಾದರೆ, y ಅನ್ನು **ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

x ನ ವೃದ್ಧಿ δx ಆಗಿರಲಿ. u ಮತ್ತು y ನ ಸಹವೃದ್ಧಿಗಳು δu ಮತ್ತು δy ಇರಲಿ.

ಆಗ, $\dfrac{\delta y}{\delta x}=\dfrac{\delta y}{\delta u}\times\dfrac{\delta u}{\delta x}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\therefore \underset{\delta x\to 0}{\text{ಮಿತಿ}}\frac{\delta y}{\delta x}=\underset{\delta x\to 0}{\text{ಮಿತಿ}}\left(\frac{\delta y}{\delta u}\times\frac{\delta u}{\delta x}\right)$$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$ (ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ)

ಇದನ್ನು **ಸರಪಳಿ ತತ್ವ** (**Chain rule**) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ: y ಯು u ವಿನ, u, v ಯ, v, wನ ಮತ್ತು w, x ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿರಲಿ.

ಆಗ, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dw}\cdot\dfrac{dw}{dx}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $\sin^3 x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y=u^3$ ಮತ್ತು $u=\sin x$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\frac{dy}{du}=3u^2 \quad \frac{du}{dx}=\cos x$$

$$=3\sin^2 x$$

ಸರಪಳಿ ತತ್ವದಿಂದ,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=3\sin^2 x\cdot\cos x$$

(2) $\tan^3 \sqrt{x^2+1}$ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = u^3$, $u = \tan v$, $v = \sqrt{w}$ ಮತ್ತು $w = x^2 + 1$ ಆಗಿರಲಿ

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \qquad \frac{du}{dv} = \sec^2 v \qquad \frac{dv}{dw} = \frac{1}{2\sqrt{w}} \qquad \frac{dw}{dx} = 2x$$

$$= 3\tan^2 v \qquad = \sec^2 \sqrt{w} \qquad = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= 3\tan^2 \sqrt{w} \qquad = \sec^2 (\sqrt{x^2+1})$$

$$= 3\tan^2 (\sqrt{x^2+1})$$

ಸರಪಳಿ ತತ್ವದಿಂದ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dw} \times \frac{dw}{dx}$$

$$= (3\tan^2 \sqrt{x^2+1}) \times \sec^2 \sqrt{x^2+1} \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \times 2x$$

$$= \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \tan^2 \sqrt{x^2+1} \cdot \sec^2 \sqrt{x^2+1}$$

ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು *(Derivative of a function of a function)* ಈ ಕೆಳಕಂಡ ನಿಯಮದಿಂದಲೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು :

3.2 ನಿಯಮ : z, xನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ,

$$\frac{d}{dx}(Z^n) = n\,Z^{n-1}\frac{dz}{dx}$$

ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : ಈಗ, $\frac{d}{dx}(z^n) = \frac{d}{dx}(z \cdot z \cdot z \ldots\ldots n$ ಅಪವರ್ತನಗಳು)

$\therefore$ ಪ್ರಮೇಯ 4 ರ ವಿಸ್ತರಣೆಯಿಂದ,

$$\frac{d}{dx}(z^n) = \{z \cdot z \cdot z \ldots\ldots (n-1) \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}\}. \frac{dz}{dx}$$

$$+ \{z \cdot z \cdot z \ldots\ldots (n-1) \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}\} \frac{dz}{dx} + \ldots\ldots n \text{ ಪದಗಳು}$$

$$= Z^{n-1}.\frac{dz}{dx} + Z^{n-1}.\frac{dz}{dx} + \ldots\ldots n \text{ ಪದಗಳು}$$

$$= n\cdot Z^{n-1}.\frac{dz}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(Z^n) = n\cdot Z^{n-1}.\frac{dz}{dx}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದ ಸಹಾಯದಿಂದ, $\sec^3 x$ ನ ನಿಷ್
ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = \sec^3 x$ ಆಗಿರಲಿ,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3(\sec x)^{3-1}.\frac{d}{dx}(\sec x)$$

$$= 3\cdot\sec^2 x.\sec x.\tan x$$

$$= 3\cdot\sec^3 x\tan x$$

(2) $\text{cosec}^3\sqrt{x+1}$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = \text{cosec}^3\sqrt{x+1}$ ಆಗಿರಲಿ.

ನಮಗೆ, $\frac{d}{dx}(Z^n) = n\cdot Z^{n-1}.\frac{dz}{dx}$ ಎಂದು ಗೊತ್ತು.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3(\text{cosec}\sqrt{x+1})^{3-1}.\frac{d}{dx}(\text{cosec}\sqrt{x+1})$$

$$= 3(\text{cosec}\sqrt{x+1})^2\{-\text{cosec}\sqrt{x+1}\cdot\cot\sqrt{x+1}\}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{x+1})$$

$$= 3\,\text{cosec}^2\sqrt{x+1}\,(-\text{cosec}\sqrt{x+1}\cdot\cot\sqrt{x+1})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot\frac{d}{dx}(x+1)$$

$$= -3\,\text{cosec}^2\sqrt{x+1}\cdot\text{cosec}\sqrt{x+1}\cdot\cot\sqrt{x+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot 1$$

$$= -3\operatorname{cosec}^3\sqrt{x+1}\cdot\cot\sqrt{x+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= -\frac{3}{2\sqrt{x+1}}\cdot\operatorname{cosec}^3\sqrt{x+1}\ \cot\cdot\sqrt{x+1}$$

3.3 ವಿಪರ್ಯಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು [Inverse Circular Functions]

y ಎಂಬುದು x ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, x, y ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. x ಎಂಬುದನ್ನು y ನ **ವಿಪರ್ಯಯ ಉತ್ಪನ್ನ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಮತ್ತು $x = f^{-1}(y)$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $y = \sin x$ ಆದರೆ

$x = \sin^{-1} y$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ಆದರೆ,

$$y = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ಈಗ $\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ಆಗಬೇಕಾದರೆ y ಎಂಬುದು 60°, 120°, 420°, 480°$\cdots$ ಇತ್ಯಾದಿ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದನ್ನಾದರೂ ಹೊಂದುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{3}$$

ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ y ನ ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ 60° ಅಥವಾ $\frac{\pi}{3}$ ಯನ್ನು y ನ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆ (Principal value) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ವಿಪರ್ಯಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಬಂದಾಗ ನಾವು ಅವುಗಳ ಪ್ರಧಾನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪರಿಗಣಿಸುವೆವು.

3.4 ವಿಪರ್ಯಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು

1. $\sin^{-1} x$

$y = \sin^{-1} x$ ಇರಲಿ.

$x = \sin y$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $\dfrac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

$= \sqrt{1 - x^2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\therefore \dfrac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

2. $\cos^{-1} x$

$y = \cos^{-1} x$ ಇರಲಿ.

$x = \cos y$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $\dfrac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1 - \cos^2 y} = -\sqrt{1 - x^2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\therefore \dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

3. $\tan^{-1} x$

$y = \tan^{-1} x$ ಇರಲಿ

$x = \tan y$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $\dfrac{dx}{dy} = \sec^2 y$

$= 1 + \tan^2 y$

$= 1 + x^2$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)} = \dfrac{1}{1 + x^2}$

$\therefore \dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

4. $\sec^{-1} x$

$y = \sec^{-1} x$ ಇರಲಿ.

$x = \sec y$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ, $\frac{dx}{dy} = \sec y \cdot \tan y = \sec y \cdot \sqrt{\sec^2 y - 1}$

$= x \cdot \sqrt{x^2 - 1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

ಮೇಲಿನ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ನಾವು,

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1 + x^2}$$

ಮತ್ತು $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ :

(1) $\tan^{-1}\sqrt{x}$, (2) $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{x}\right)$ (3) $\cot^{-1}(\cos x)$,

(4) $\sec^{-1}(\operatorname{cosec} x)$ (5) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

(1) $y = \tan^{-1}\sqrt{x}$ ಇರಲಿ.

$\sqrt{x} = \tan y$

$$\therefore \frac{d}{dy}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dy}(\tan y)$$

ಅಂದರೆ. $\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y$

$= 1 + (\sqrt{x})^2$

$= 1 + x$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = 2\sqrt{x}(1+x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot(1+x)}$$

ಅಥವಾ ಇದೇ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಉತ್ಪನ್ನದ ಉತ್ಪನ್ನದ ರೀತ್ಯಾ ಮಾಡಬಹುದು.

$$y = \tan^{-1}\sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

(2) $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ ಇರಲಿ

ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಮೊದಲು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತರೋಣ.

$x = \cos^2\theta$ ಇರಲಿ.

[ಅಂದರೆ, $\sqrt{x} = \cos\theta, \quad \therefore \theta = \cos^{-1}\sqrt{x}$]

$$\therefore 1 - x = 1 - \cos^2\theta$$

$$= \sin^2\theta$$

$$\therefore y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$= \tan^{-1}\sqrt{\tan^2\theta}$$

$$= \tan^{-1}(\tan\theta)$$

$$\therefore \tan y = \tan\theta$$

ಅಂದರೆ, $y = \theta$

$$\frac{dy}{d\theta} = 1$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos^{-1}\sqrt{x}) = \frac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx}$$

$$= 1 \times \left[\frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\right]$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}$$

(3) $y = \cot^{-1}(\cos x)$ ಇರಲಿ.

$\therefore \cos x = \cot y$ ಇದು ವ್ಯಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನ.

ಎರಡು ಕಡೆಯನ್ನೂ x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದರೆ,

$$-\operatorname{cosec}^2 y \cdot \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\operatorname{cosec}^2 y} = \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cot^2 y}}$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$$

(4) $y = \sec^{-1}(\operatorname{cosec} x)$ ಇರಲಿ.

ಈಗ $\sec^{-1}(\operatorname{cosec} x) = \sec^{-1}\left[\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$

$$\therefore y = \sec^{-1}\left[\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$$

ಅಂದರೆ, $\sec y = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\therefore y = \frac{\pi}{2} - x$$

ಅಂದರೆ, $\frac{dy}{dx} = -1$

(5) $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$ ಇರಲಿ.

$\sin y = \frac{2x}{1 + x^2}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$x = \tan \theta$ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \quad \sin y = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \tan \theta}{\sec^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} \times \cos^2 \theta$$

$$= 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= \sin 2\theta$$

$$\therefore \quad y = 2\theta$$

$$= 2 \tan^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x)$$

$$= \frac{2}{1 + x^2}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 3

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

I. $(x + 1)^3$; $(2 + 3x)^4$; $(3 - 4x)^7$; $(7x - 6)^8$;

$(2x^2 + 3x - 2)^{9/10}$; $\sqrt[n]{2x + 3}$; $\frac{1}{\sqrt{2x - 3}}$; $\sqrt[4]{7x - 5}$.

II. $\sqrt[4]{2 + x^2}$; $\sqrt{1 + x}$; $\frac{1}{\sqrt{x - 1}}$; $\frac{1}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}}$

III. $\sin (x^2 - 4)$; $\cos^3 (x + 1)$; $\operatorname{cosec} (2x + 3)$;

$\sin^2 (\cos 3x)$; $\tan^2 (x^3 + 1)$; $\cot^2 (3x - 1)^2$;

$\sec^3 (3x + 2)$; $\cos (x \sin \alpha)$; $\sin 2x$;

$\cos 2x$; $\tan ax$; $\sec ax$;

$\operatorname{cosec} ax$; $\sqrt{\operatorname{cosec} (3x + 1)}$; $\cos^2 \sqrt{2x - 3}$

$\sqrt[3]{\sin \sqrt{x + 1}}$; $\sqrt{\tan^3 (x^2 + 1)}$; $\cot^3 \sqrt[3]{x + 1}$;

$\sqrt[3]{\sec^2 x}$; $\cos (\sin x)$; $\tan^2 (\operatorname{cosec} 3x)$

IV. $\dfrac{x-1}{\sqrt{3x-2}}$; $\sqrt{x-1}\,(x+1)^3$; $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; $\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$; $x\sqrt{x^2-1}$;

$(x^2-1)^3\sin^3 x$; $\sqrt{\dfrac{1-x-x^2}{1+x+x^2}}$; $\left(3x-\dfrac{3}{x}\right)^7$;

$(x^7+1)\,(x^2-1)^4$; $\sqrt{x+1}\cdot\tan^4 x$; $\dfrac{(7x+1)^3}{(7x-1)}$

$\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^n$; $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}$

V. $\sin 3x.\cos 2x$; $\sin^2 x.\cos^2 x$;

$\tan^2 x\cdot\cot^2 x$; $\cos^2 3x.\sin x$

VI. $\sin^{-1}\sqrt{x}$; $\tan^{-1}(\cot x)$; $\cos^{-1}(\sin x)$;

$\operatorname{cosec}^{-1}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)$; $\sec^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$; $\sec^{-1}\left(\dfrac{a^2}{x^2}\right)$

$\cot^{-1}\left(\dfrac{a+bx}{a-bx}\right)$; $\sin^{-1}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^3$; $\tan^{-1}(\sin\sqrt{x^2+1})$

$\operatorname{cosec}^{-1}(x^2)$; $\cot^{-1}(\tan x)$; $\sec^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

$\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}\cdot\tan\dfrac{x}{2}\right)$; $\tan^{-1}\left(\dfrac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)$;

$\cos^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

VII. $x\cos^{-1}x$; $x^2\cot^{-1}x$; $(x+1)\sin^{-1}x$;

$(x-1)\cos^{-1}x$; $\sqrt{1+x}.\operatorname{cosec}^{-1}x$;

$(\cot^{-1}x^2)^3$; $(1+x)\sec^{-1}(1+x)$; $x\tan^{-1}\sqrt{x}$

VIII. $\cos(\tan^{-1}x)$; $\cot(\tan^{-1}x)$;

$\cos(a\sin^{-1}x)$; $\sec(\cos^{-1}x)$

ಅಧ್ಯಾಯ 4

ವ್ಯಕ್ತ, ಅವ್ಯಕ್ತ, ಸ್ಥಿರರಾಶಿ, ಎಕ್ಸ್‌ಪೊನೆನ್ಷಿಯಲ್ ಮತ್ತು ಲಘುಗಣಕಗಳ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

4.1 ವ್ಯಕ್ತ ಮತ್ತು ಅವ್ಯಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು

ನಾವು ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ವಿವರಿಸುವಾಗಲೆಲ್ಲಾ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನೇ ವಿವರಿಸಿದಂತಾಗಿದೆ. y ಅನ್ನು x ನ ಉತ್ಪನ್ನವೆನ್ನಬೇಕಾದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಷರತ್ತುಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ವಿವರಿಸಿದ್ದೇವೆ: (1) x ನ ಪ್ರತಿ ಬೆಲೆಗೂ y ನ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ ; (2) x ನ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ y ನ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು (3) x ಮತ್ತು y ಗಳ ಸಂಬಂಧವು ಸಮೀಕರಣದಿಂದಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಸೂತ್ರದಿಂದಾಗಲೀ ವ್ಯಕ್ತಪಡುತ್ತದೆ.

ಆದರೆ ಮೇಲ್ಕಂಡ ಷರತ್ತುಗಳಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡುವ ಉತ್ಪನ್ನವು ಕೇವಲ **ವ್ಯಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನ** ಮಾತ್ರ. ವ್ಯಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಉದಾಹರಣೆ, $y = 2x + 3$.

ಇಲ್ಲಿ y ಮತ್ತು x ಗಳ ಸಂಬಂಧವು ಸುಲಭವಾಗಿ ರೂಪಿತವಾಗಿದೆ,

ಆದರೆ, ಎಲ್ಲ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಲ್ಲೂ ಈ ರೀತಿ ನೇರ ಸಂಬಂಧವು ವ್ಯಕ್ತವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. **ಉದಾಹರಣೆಗೆ,** $y^2 + xy + x^2 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನೇ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇಲ್ಲಿ y ಮತ್ತು x ನ ಸಂಬಂಧವು ಹೀಗೇ ಇರುವುದೆಂದು ನಿಕರವಾಗಿ ಹೇಳಲಸಾಧ್ಯ. ಆದರೂ ಅದನ್ನು y, x ನ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದಾಗಲೀ ಅಥವಾ x, y ನ ಉತ್ಪನ್ನವೆಂದಾಗಲೀ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಇಂತಹ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ **ಅವ್ಯಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನ**ಗಳೆಂದು ಹೆಸರು.

ಈ ಮೇಲೆ ಉದಾಹರಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ x ನ ಪ್ರತಿ ಬೆಲೆಗೂ, ಒಂದೇ ಒಂದು y ನ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆ ಇರಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ. $x = 1$ ಆದರೆ, $y = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆ ಇರುವುದು ವ್ಯಕ್ತಪಡುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ y ಗೆ, x ನ ಒಂದು ಬೆಲೆಗೆ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಜಾಸ್ತಿಯಾದ ಸಹಗಾಮಿ ಬೆಲೆ ಇರುವುದು ವ್ಯಕ್ತಪಡುತ್ತದೆ.

ಹಾಗೆಯೇ, ಒಂದು ಸಂಬಂಧವು $f(x, y) = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಿಂದಲೂ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಡಬಹುದು. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು ಇದ್ದರೂ ಇರಬಹುದು, ಇಲ್ಲದಿರಲೂಬಹುದು.

4.2 ಅವ್ಯಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಭಿನ್ನಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯ ಕ್ರಮ

ಈ ಅವ್ಯಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ, ಪ್ರತಿಪದದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನೂ ಬೇರೆ ಬೇರೆಯಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅನಂತರ ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದುಗೂಡಿಸುವುದು ವಿಹಿತವಾದುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $y^2 + xy + x^2 = 0$ ಇದರ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಇದು ಅವ್ಯಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುವುದು ವೇದ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಎರಡು ಕಡೆಯನ್ನೂ x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದರೆ,

$$\frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(0).$$

$$\frac{dy^2}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \left[y \cdot \frac{d}{dx}(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(y)\right] + \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} + y + x \cdot \frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y + x) = -(2x + y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{(2x + y)}{(2y + x)}$$

(2) $y = \cos(x^2y^2)$ ಅನ್ನು ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\cos(x^2y^2)]$$

$$= -\sin(x^2y^2) \cdot \frac{d}{dx}(x^2y^2)$$

$$= -\sin(x^2y^2)\left[2xy^2 + 2y \cdot x^2 \frac{dy}{dx}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} + 2y \cdot x^2 \cdot \frac{dy}{dx}[\sin(x^2y^2)] = -2xy^2 \sin(x^2y^2)$$

ಅಂದರೆ, $2 \cdot \frac{dy}{dx}[\frac{1}{2} + yx^2 \sin(x^2y^2)] = -2xy^2 \sin(x^2y^2)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{xy^2 \sin(x^2y^2)}{[\frac{1}{2} + yx^2 \sin(x^2y^2)]}$$

(3) $\cos x^2 \sin y^2 = 2$ ಇದರ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{d}{dx}(\cos x^2 \cdot \sin y^2) = \frac{d}{dx}(2)$$

$$\cos x^2 \cdot \frac{d}{dx}(\sin y^2) + \frac{d}{dx}(\cos x^2) \cdot \sin y^2 = 0$$

$$2y \cdot \cos x^2 \cdot \cos y^2 \frac{dy}{dx} - 2x \sin y^2 . \sin x^2 = 0$$

ಅಂದರೆ, $\frac{dy}{dx}(y . \cos x^2 . \cos y^2) = x \sin y^2 \sin x^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{\sin y^2}{\cos y^2} \cdot \frac{\sin x^2}{\cos x^2}$$

$$= x/y . \tan y^2 . \tan x^2.$$

4·3 ಸ್ಥಿರರಾಶಿಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳು (Parametric functions)

$x = f(t)$ ಮತ್ತು $y = g(t)$, ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು **ಸ್ಥಿರರಾಶಿಯ ಸಮೀಕರಣ**ಗಳೆಂದೂ, x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನು **ಸ್ಥಿರರಾಶಿಯ ಉತ್ಪನ್ನ**ಗಳೆಂದೂ 't' ಯನ್ನು **ಸ್ಥಿರರಾಶಿ**ಯೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಂತಹ ಸಮಯಗಳಲ್ಲಿ ಬಹಳವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಬರುವ ಸೂತ್ರ ಸರಪಳಿ ತತ್ವ ':

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $x = at^2$ ಮತ್ತು $y = 2at$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಅನ್ನು **ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

$$y = 2at$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(2at) = 2a$$

$$x = at^2$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(at^2) = 2at$$

ಅಂದರೆ, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{1}{2at}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = 2a \cdot \frac{1}{2at} = \frac{1}{t}$$

ಆದರೆ, $t = \frac{y}{2a}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{y}{2a}\right)} = \frac{2a}{y}$$

(2) $x = \cos 2t,\ y = \sin 2t$ ಆದರೆ $\frac{dy}{dx}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = \sin 2t,$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin 2t) = 2\cos 2t$$

ಹಾಗೆಯೇ, $x = \cos 2t,$

$$\therefore \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{1}{\frac{d}{dt}(\cos 2t)}$$

$$= \frac{1}{-2\sin 2t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = 2\cos 2t \times \frac{1}{-2\sin 2t}$$

$$= -\cot 2t$$

ಆದರೆ, $2t = \sin^{-1} y$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\cot(\sin^{-1} y)$$

4.4 ಎಕ್ಸ್‌ಪೊನೆನ್ಷಿಯಲ್ ಮತ್ತು ಲಘುಗಣಕದ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು

(1) ಎಕ್ಸ್‌ಪೊನೆನ್ಷಿಯಲ್ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನ :

$e = 1 + \frac{1}{\lfloor\underline{1}} + \frac{1}{\lfloor\underline{2}} + \frac{1}{\lfloor\underline{3}} + \ldots\ldots\ldots \infty$ ವರೆಗೆ, ಎಂಬುದು ಒಂದು ಅಪರಿಮೇಯ ಸಂಖ್ಯೆ.

e ನ ಬೆಲೆ, $e = 2{\cdot}7182\,8\,182\ldots$

ಈಗ, e ನ್ನು **ಎಕ್ಸ್‌ಪೊನೆನ್ಷಿಯಲ್ ಉತ್ಪನ್ನ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಮತ್ತು $e^x = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{\lfloor n} + \ldots\ldots \infty$ ವರೆಗೆ.

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ ಮತ್ತು $\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) e^{2x} ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2\,e^{2x}$$

(2) $e^{\sin x}$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{d}{dx}(e^{\sin x}) = e^{\sin x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

2. ಲಘುಗಣಕದ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನ :

$y = \log_e f(x)$ ಆದರೆ,

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{d}{dx}\{f(x)\}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $\log \sin x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{d}{dx}(\log \sin x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

$$= \cot x$$

(2) $\log \tan (x^2 + x + 1)$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{d}{dx}[\log \tan (x^2 + x + 1)] = \frac{1}{\tan (x^2 + x + 1)} \cdot \frac{d}{dx}[\tan (x^2 + x + 1)]$$

$$= \frac{1}{\tan(x^2+x+1)} \cdot \sec^2(x^2+x+1) \cdot \frac{d}{dx}(x^2+x+1)$$

$$= \frac{1}{\tan(x^2+x+1)} \cdot \sec^2(x^2+x+1) \cdot (2x+1)$$

$$= \frac{(2x+1)\sec^2(x^2+x+1)}{\tan(x^2+x+1)}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 4

I. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(1) $y^2 = 4ax$; (11) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy = 0$

(2) $x^2 + y^2 = a^2$; (12) $y = \cos(xy)$

(3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; (13) $\sin^2(x+y) + x^2 = 0$

(4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; (14) $x^2 + y^2 = \sin(x^2 - y^2)$

(5) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$; (15) $(x+y)^3 = x^3 + 3axy + by^3$

(6) $xy = c^2$; (16) $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = a$

(7) $x^5 + 2x^3y^3 + y^6 = 0$; (17) $x \tan y = \cot x$

(8) $x^3 - y^3 = 0$; (18) $\sin 3x + 4\cos y - x = c$

(9) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$; (19) $x^3y^2 = a^5$

(10) $x^3 + y^3 = 3axy$; (20) $\tan(4x+y) - \sin 2x = 0.$

II. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(1) $x = at^2,\ y = 2at$

(2) $x = (b\cos\theta - a\sin\theta),\ y = (b\sin\theta - a\cos\theta)$

(3) $x = a\tan\theta,\ y = b\cot\theta$

(4) $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1 + \cos\theta)$

(5) $x = a\tan\theta \operatorname{cosec}\theta$; $y = b\cot\theta\sec\theta$

(6) $x = a\sin\theta$; $y = b\cos\theta$

(7) $x = c\sqrt{2t}$, $y = \sqrt{c \cdot 2t}$

(8) $x = a\cos^3\theta$, $y = b\sin^3\theta$

(9) $x = (t^2 - 2t + 1)$, $y = (t^2 + 2t + 1)$

(10) $x = \sqrt{t+1}$, $y = \sqrt{t^2 - 1}$.

III. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(1) e^{4x} :

(2) e^{ax+b}

(3) e^{8x-4}

(4) $e^{3x}\cos 2x$

(5) $e^{(2x+1)} \cdot \cos 3x \cdot \sin 2x$

(6) $e^{-2x} \cdot \tan x$

(7) $\frac{e^{3x+1}}{e^{3x-1}}$

(8) $\frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}$

(9) $\log(e^{2x})$

(10) $\frac{x+e^{3x}}{x-e^{3x}}$

(11) $\log(\tan x)$

(12) $\log(\sec x)$

(13) $\log\sin(x^2+5)$

(14) $\log(x^2+x-1)$

(15) $\log\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)$

(16) $x^2\log x$

(17) $\log\sqrt{x+1}$

(18) a^x

(19) $\log\tan^2(\sin x)$

(20) $\log\cot x^3$

(21) $3^x \cdot \sin 2x$

(22) $4^{5x} \cdot \operatorname{cosec} 3x$

(23) $\frac{\sqrt{x^2-1}\,(2x+3)(3x-2)}{\sqrt{x^2+x-1}}$

(24) $\frac{(x^2+1)\operatorname{cosec} x}{(x+5)^3}$

(25) $\cot(\log 3x)$

(26) $e^{\log(\sqrt{x+1})}$

(27) $\sec(x+1)\tan^2 e^{2x}$

(28) $\log(2x^2+3)$

IV. ಇವುಗಳ $\frac{dy}{dx}$ ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(1) $\sqrt{xy} + \log(xy) = 0$

(2) $e^{3 \log xy} + 2x = 0$

(3) $x = a \log t \quad , \quad y = b \log(t+1)$

(4) $x = \log(\sin t), \quad y = b \log(\cos t)$

(5) $x = e^{\sin t} \quad , \quad y = e^{\cos t}$

(6) $x = e^{2 \tan t} \quad , \quad y = e^{3 \cot}$

ಅಧ್ಯಾಯ 5

ಕ್ರಮಾಗತ ಭಿನ್ನಕಲನಕ್ರಿಯೆ

(SUCCESSIVE DIFFERENTIATION)

$y = x^5 + 3x^2 + 2$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು 5 ನೆಯ ಘಾತದ ಸಮೀಕರಣವಾಗಿದೆ. ಈಗ ಇದರ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 6x$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಬಂದಿರುವ ನಿಷ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಮತ್ತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ, ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ $\frac{dy}{dx}$ ಸಹ x ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ. ಈಗ ಬರುವ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು y ನ **ಎರಡನೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನ** ಅಥವಾ **ಎರಡನೆಯ ಕಲನಾಂಕ** ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $\frac{d^2y}{dx^2}$, y_2, $f''(x)$ ಅಥವಾ v'' ನಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 + 6$$

ಮತ್ತು $\frac{''d^2y''}{dx^2}$ ಸಹ x ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದನ್ನು ಪುನಃ ಭಿನ್ನ ಕಲನಕ್ರಿಯೆಗೆ ಒಳಪಡಿಸಬಹುದು. ಭಿನ್ನಕಲನಕ್ರಿಯೆಗೆ ಒಳಪಡಿಸಿದ ನಂತರ ಎಲ್ಲಿಯ ತನಕ, ಬರುವ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳು x ನ ಉತ್ಪನ್ನ (ಅಥವಾ ನಿಯತಾಂಕ) ವಾಗಿರುವುದೊ ಅಲ್ಲಿಯ ತನಕವೂ ಭಿನ್ನ ಕಲನಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು. ಬರುವ ಪ್ರ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನೂ ಎರಡನೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನ, ಮೂರನೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನ, ನಾಲ್ಕನೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನ ··········n ನೆಯ ನಿಷ್ಪನ ವೆಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಕ್ರಮವಾಗಿ :

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ಅಥವಾ y_2 ಅಥವಾ $f''(x)$ ಅಥವಾ y''

$\frac{d^3y}{dx^3}$ ಅಥವಾ y_2 ಅಥವಾ $f'''(x)$ ಅಥವಾ y'''

$\frac{d^4y}{dx^4}$ ಅಥವಾ y_4 ಅಥವಾ $f^{(iv)}(x)$ ಅಥವಾ $y^{(iv)}$

. . . .

$\frac{d^ny}{dx^n}$ ಅಥವಾ y_n ಅಥವಾ $f^{(n)}(x)$ ಅಥವಾ $y^{(n)}$

ದರಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

[illegible]ದ ಭಿನ್ನ ಕಲನಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ಸಲ ಅಳವಡಿಸಬೇಕೆಂದು ನಿರ್ದೇಶಿಸಿದ್ದರೆ ಅಷ್ಟು ಸಲವೂ, ಇಲ್ಲವೇ ಕ್ರಮಾನುಗತ ಭಿನ್ನ ಕಲನಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿರೆಂದರೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅತ್ಯಧಿಕ ಘಾತದಷ್ಟು ಸಲವೂ ಭಿನ್ನ ಕಲನಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿ ಕ್ರಮಾನುಗತ ನಿಷ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $x^3 + x^2 + 1$ ನ ಎರಡನೇ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = x^3 + x^2 + 1$ ಇರಲಿ.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(3x^2 + 2x)$$

$$= 6x + 2$$

(2) $\sin 3x$ ನ ಮೂರನೇ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = \sin 3x$ ಇರಲಿ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin 3x) = 3\cos 3x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(3\cos 3x)$$

$$= 3(-3\sin 3x)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -9\sin 3x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}(-9\sin 3x)$$

$$= -9(3\cos 3x)$$

$$\therefore \frac{d^3y}{dx^3} = -27\cos 3x$$

(3) $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ ಆದರೆ,

$x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

$$\left[y_1 = \frac{dy}{dx},\ y_2 = \frac{d^2y}{dx^2}\right]$$

$$y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$$

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = -a\sin(\log x)\frac{1}{x} + b\cos(\log x).\frac{1}{x}$$

ಅಂದರೆ, $y_1 = \dfrac{-a\sin(\log x) + b\cos(\log x)}{x}$

$$\therefore\ xy_1 = -a\sin(\log x) + b\cos(\log x)$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಕಡೆಯನ್ನೂ x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$x.\frac{d}{dx}(y_1) + y_1.\frac{d}{dx}(x) = -a\cos(\log x).\frac{1}{x} - b\sin(\log x).\frac{1}{x}$$

ಅಂದರೆ, $xy_2 + y_1 = \dfrac{-[a\cos(\log x) + b\sin(\log x)]}{x}$

ಅಂದರೆ, $x^2y_2 + xy_1 = -[a\cos(\log x) + b\sin(\log x)]$

$$= -y$$

$\therefore\ x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

(4) $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ ಆದರೆ,

$(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = 1$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

$\left[y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}\right.$ ಮತ್ತು $\left. y^1 = \dfrac{dy}{dx}\right]$

$$y = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$$

$$y^1 = \frac{1}{2}.2\sin^{-1}x.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\sqrt{1-x^2}.\ y^1 = \sin^{-1}x$

ಅಂದರೆ, $(\sqrt{1-x^2}.\ y^1)^2 = (\sin^{-1}x)^2$

ಅಂದರೆ $(1-x^2)(y^1)^2 = (\sin^{-1} x)^2$

ಅಂದರೆ, $(1-x^2)(y^1)^2 = 2y$

ಎರಡು ಕಡೆಯನ್ನೂ x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದರೆ,

$$(1-x^2).2y^1.y^{11} + (y^1)^2(-2x) = 2y^1$$

ಅಂದರೆ, $2y^1[(1-x^2)y^{11} - xy^1 - 1] = 0$

$2y^1 = 0$ ಎಂಬುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

$\therefore\ (1-x^2)y^{11} - xy^1 - 1 = 0$

ಅಂದರೆ, $(1-x^2)y^{11} - xy^1 = 1$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = 1$

ಅಭ್ಯಾಸ 5

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳ ಎರಡನೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) x^4

(ii) $ax^6 + 3bx^2 + 2cx + d$

(iii) $\dfrac{1}{x^2+1}$

(iv) $\dfrac{1-x}{1+x}$

(v) $\tan^2 x$

(vi) $\sec^2 x$

(vii) e^{-x^2}

(viii) $(x^2+4)e^{2x}$

(ix) $x \log x$

(x) $5\sqrt{x}$

(xi) $\sqrt[3]{x^2}$

(xii) $x^2 \sin x$

(xiii) $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$

(xiv) $x = at^2,\ y = 2at$

(xv) $x = a\tan t,\ y = b\cot t$

2. ಮೂರು ಮತ್ತು ನಾಲ್ಕನೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(i) $3x^2$; (ii) $4x^3$; (iii) e^{5x} ; (iv) $\sin 2x$

3. $y^2 = 4ax$ ಆದರೆ, $y_2 = -\dfrac{4a^2}{y^3}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

4. $y = x + \dfrac{1}{x}$ ಆದರೆ, $x^2y_2 + xy_1 - y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

5. $y = ax^3 + bx^2$ ಆದರೆ, $x^2y_2 - 4xy_1 + 6y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

6. $y = a\cos mx + b\sin mx$ ಆದರೆ, $y^{11} + m^2y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. $y = x^3e^x$ ಆದರೆ, $xy_2 - (2 + x)y_1 - y = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8. $y = e^x \log x$ ಆದರೆ,

$$x \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - (2x - 1)\frac{dy}{dx} + (x - 1)y = 0$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

9. $y = \tan^{-1} x$ ಆದರೆ, $(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x.\frac{dy}{dx} = 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. $y = (x + \sqrt{x^2 - 1})^m$ ಆದರೆ,

$$(x^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\cdot\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

11. $y = \sin(m\sin^{-1} x)$ ಆದರೆ,

$$(1 - x^2)y^{11} - xy^1 + m^2y = 0$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

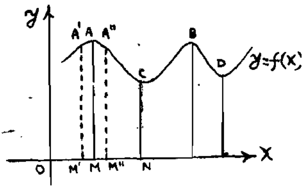
12. $y = \sin(\log x)$ ಆದರೆ,

$$x^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + x\cdot\frac{dy}{dx} + y = 0$$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 6

ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳು

6.1 $y = f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದೆ. A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬವು (AM), $y = f(x)$ ನ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ, A ಯ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬಕ್ಕಿಂತಲೂ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದನು $y = f(x)$ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು AM, $y = f(x)$ ನ **ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 3

ಇದೇ ರೀತಿ C ಬಿಂದುವಿನಿಂದ x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು (CN), $y = f(x)$ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ C ಯ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ x-ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಎಳೆದಿರುವ ಲಂಬಕ್ಕಿಂತಲೂ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ನಾವು $y = f(x)$, C ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿದೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು CN, $y = f(x)$ ನ **ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ** ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

A ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ $\frac{dy}{dx}$ ಅಥವಾ $f^1(x)$ ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು **ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು** (Stationary Points) ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

6.2 ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳಾಗಲು ನಿಬಂಧಗಳು

y, x ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ, $y = f(x)$ ಇರಲಿ,

(1) x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು $\frac{dy}{dx}$ ಮತ್ತು $\frac{d^2y}{dx^2}$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $\frac{dy}{dx} = 0$ ಮತ್ತು $\frac{d^2y}{dx^2}$ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದರೆ, $y = f(x)$ ಮೇಲಿನ x ನ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು x ನ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು $y = f(x)$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಬೆಲೆಯೇ **ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ.**

(2) x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು $\frac{dy}{dx}$ ಮತ್ತು $\frac{d^2y}{dx^2}$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $\frac{dy}{dx} = 0$ ಮತ್ತು $\frac{d^2y}{dx^2}$ ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, $y = f(x)$ ಮೇಲಿನ x ನ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು x ನ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು $y = f(x)$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಬರುವ ಬೆಲೆಯೇ **ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ.**

6.3 ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನ

(1) $y = f(x)$ ಇರಲಿ.

(2) $\frac{dy}{dx}$ ಮತ್ತು $\frac{d^2y}{dx^2}$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) $\frac{dy}{dx} = 0$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ x **ಗೆ ಬೆಲೆಗಳು** ಬರುತ್ತವೆ. ಇವುಗಳೇ ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುಗಳು.

(4) ಮೇಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿದ x ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ.

(5) (i) $\frac{d^2y}{dx^2}$ ನ ಬೆಲೆಯು ಋಣವಾದರೆ, $y = f(x)$ x ನ ಈ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು x ನ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು $y = f(x)$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ y ನ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು ಬರುತ್ತದೆ.

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}$ ನ ಬೆಲೆಯು ಧನವಾದರೆ, $y = f(x)$ x ನ ಈ ಬೆಲೆಯಲ್ಲಿ ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು x ನ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು $y = f(x)$ ನಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ y ನ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ ಬರುತ್ತದೆ.

ಟಿಪ್ಪಣಿ : $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ಆದರೆ $\frac{d^3y}{dx^3}$ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. $x = a$ ಆದಾಗ $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ ಆದರೆ, $x = a$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವನ್ನು **ಪಾಯಿಂಟ್ ಆಫ್ ಇನ್‌ಫ್ಲೆಕ್ಷನ್** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಚರ್ಚೆಯು ಈ ಪುಸ್ತಕದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಮೀರಿದ ವಿಷಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇಲ್ಲಿ ಕೈ ಬಿಡಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $3x^2 - 2x + 5$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದ **ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.**

$y = 3x^2 - 2x + 5$ ಇರಲಿ.

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 2$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$6x - 2 = 0$$

$$\therefore\ x = \frac{1}{3}$$

$x = \frac{1}{3}$ ಆದಾಗ $y = \frac{14}{3}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right)$ ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು.

(2) $4x^3 + 9x^2 - 54x + 15$ ಎಂಬ **ಉತ್ಪನ್ನದ ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು** ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y = 4x^3 + 9x^2 - 54x + 15$ ಇರಲಿ.

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 18x - 54$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 24x + 18$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ,

$12x^2 + 18x - 54 = 0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $2x^2 + 3x - 9 = 0$

ಅಂದರೆ, $(x + 3)(2x - 3) = 0$

$\therefore\ x = -3$ ಅಥವಾ $x = \frac{3}{2}$

(i) $x = -3$ ಆದಾಗ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 24(-3) + 18 = -54 < 0$$

$\therefore\ x = -3$ ಆದಾಗ y ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= 4(-3)^3 + 9(-3)^2 - 54(-3) + 15$
$= 150$

(ii) $x = \frac{3}{2}$ ಆದಾಗ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 24\left(\frac{3}{2}\right) + 18 = 54 > 0$$

$\therefore\ x = \frac{3}{2}$ ಆದಾಗ y ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ

ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= 4\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 54\left(\frac{3}{2}\right) + 15$
$= -\frac{129}{4}$

ಅಭ್ಯಾಸ 6

I. ಸ್ಥಿರಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $3x^2 - 2x + 4$ (2) $2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$

II. ಗರಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳು ಇದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $5x - 6 - x^2$ (6) $2x^3 + 3x^2 - 6x - 12$

(2) $4x^3 - 7x^2 + 4x - 3$ (7) $a\cos^2\theta + b\sin^2\theta\ (0 < \theta < 2\pi)$

(3) $12x^3 + 3x^2 - 12x + 3$ (8) $2\sin x - 3\cos x$

(4) $x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ (9) $\frac{x(x+3)}{x-1}$

(5) $\cos x + \cos 2x\ (0 < x < 360^\circ)$ (10) $\frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-3)}$

III. (1) ಒಂದು ಕಂಪೆನಿಯು ತನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಒಂದಕ್ಕೆ 10 ರೂ. ಗಳಂತೆ ಮಾರುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ತಯಾರಿಸುತ್ತದೆ. ಕಂಪೆನಿಗೆ x ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ಬೆಲೆ c ರೂ. ಗಳಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು $c = 100 + x + 0{\cdot}001x^2$

(*a*) ಒಟ್ಟು ಲಾಭ p ಯನ್ನು x ನ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ;

(*b*) p ಯನ್ನು x ನ ಉತ್ಪನ್ನದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭ ಮಾಡಿ, ಕಂಪೆನಿಯು ಗರಿಷ್ಠ ಲಾಭವನ್ನು ಸಂಪಾದನೆ ಮಾಡಲು ಎಷ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅನಂತರ ಗರಿಷ್ಠ ಲಾಭವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(2) ಒಂದು ಕಂಪೆನಿಯು ತನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು ಒಂದಕ್ಕೆ 3 ರೂ.ಗಳಂತೆ ಮಾರುತ್ತದೆ. ಕಂಪೆನಿಗೆ x ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸಲು ತಗಲುವ ಖರ್ಚು, $c = 20 + 0{\cdot}6\, x + 0{\cdot}001\, x^2$ ರೂ.ಗಳು, ಕಂಪೆನಿಯು ಗರಿಷ್ಠ ಲಾಭವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಎಷ್ಟು ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಮಾರಬೇಕು ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಲಾಭವೇನು?

(3) ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಆಯದ ಸುತ್ತಳತೆ ಕನಿಷ್ಠವಾದರೆ, ಆಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಸುತ್ತಳತೆಯು 16 ಸೆಂ.ಮೀ.ಗಳು ತ್ರಿಭುಜದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿದ್ದರೆ, ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳೇನು?

(5) ಮೂರು ಧನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 30 ಆಗಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಎರಡರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಮತ್ತು ಮೂರನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೂರರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ 60 ಆಗುತ್ತದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು, ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುವಂತೆ ಆರಿಸಿರಿ.

(6) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 20 ಆಗಿದ್ದು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರುವಂತೆ ಆರಿಸಿರಿ.

(7) ತ್ರಿಜ್ಯ 6 ಅಂಗುಲ ಇರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದೊಳಗೆ ಒಂದು ಆಯವನ್ನು ರಚಿಸಿದೆ. ಆಯದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಗರಿಷ್ಠವಾದರೆ, ಆಯದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

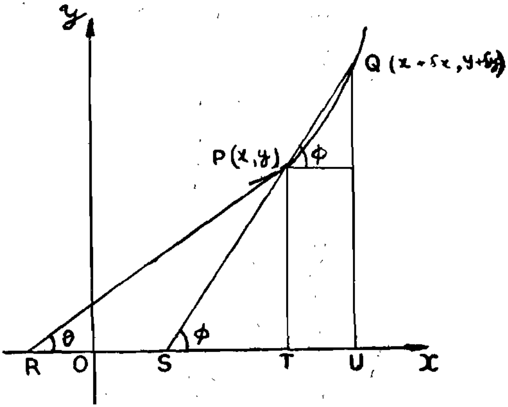
(8) 'a' ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ಒಂದು ಗೋಳದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮ ವರ್ತುಲ ಶಂಕು (Right circular cone) ವನ್ನು ರಚಿಸಿದೆ. ಈ ಶಂಕುವಿನ ಗಾತ್ರವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿದ್ದಾಗ ಶಂಕುವಿನ ಎತ್ತರವು ಗೋಳದ ವ್ಯಾಸದ 2/3 ರಷ್ಟಿರುವುದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಅಧ್ಯಾಯ 7

ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅರ್ಥ ಮತ್ತು ಉಪಯೋಗ

1 ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಅರ್ಥ

$y = f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆ. ಇದರಲ್ಲಿ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು (x, y) ಇರಲಿ. P ಬಿಂದುವು x ಬೆಲೆಯ ಸಹಗಾಮಿ ಬಿಂದುವಾಗುತ್ತದೆ. x ಮತ್ತು y ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ δx ಮತ್ತು δy ಅಲ್ಪ ಪ್ರಮಾಣಗಳಿಂದ ವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿದರೆ, ಆ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಹಗಾಮಿ ಬಿಂದು Q ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಉಂಟಾಗುವ ವಕ್ರರೇಖೆ



ಚಿತ್ರ 4

PQ ಆಗಿರಲಿ. P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆಯಿಂದ ಸೇರಿಸಿದರೆ, PQ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಜ್ಯಾ (Chord) ಆಗುತ್ತದೆ. PQ ಜ್ಯಾವು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿರುವ ox-ಅಕ್ಷದ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಯೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ϕ ಕೋನ ಆಗಿರಲಿ. δx ಮತ್ತು δy ಬೆಲೆಗಳು ಅಲ್ಪವಾದುದರಿಂದ P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುಗಳು ಸಮೀಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಚಿತ್ರದಿಂದ, $PV = TU = \delta x$

$$QV = QU - PT = y + \delta y - y = \delta y.$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{QV}{PV} = \tan\phi$$

['ϕ' ಇದನ್ನು 'ಫೈ' ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ]

$\delta x \to 0$ ಆದಂತೆ, Q ಬಿಂದುವು P ಬಿಂದುವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುವುದು. ಪರಮ ಮಿತಿ ಮುಟ್ಟಿದಾಗ PQ ಜ್ಯಾವು ವಕ್ರರೇಖೆಗೆ PQ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಆ ಸಮಯ ದಲ್ಲಿ PR, Ox-ಅಕ್ಷದೊಂದಿಗೆ ಉಂಟುಮಾಡುವ ಕೋನ θ ಆಗಿರಲಿ.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{ಮಿತಿ}} \frac{\delta y}{\delta x} = \tan\theta$$

$\therefore$ 'ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ನಕ್ಷೆಯು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ, ಅದರ ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಬೆಲೆಯು ಆ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಓಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.'

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $y^2 = 4ax$ ನ ಓಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$y^2 = 4ax$ (ದತ್ತ)

ಎರಡು ಕಡೆಯನ್ನೂ, x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ,

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = 4a$$

$$\therefore \text{ಓಟ} = \frac{dy}{dx} = \frac{4a}{2y} = \frac{2a}{y}$$

(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಓಟವನ್ನು (3, 1) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ಎರಡು ಕಡೆಯನ್ನೂ x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ನಿಷ್ಪನ್ನಿಸಿದಾಗ

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$(x, y) = (3, 1)$ ಆದಾಗ,

$$\text{ಓಟ} = \frac{dy}{dx}(3, 1) = -\frac{3b^2}{a^2}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 7 (ಅ)

1 ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಓಟವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(1) $x^2 + y^2 = 9$; $(1, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿ.

(2) $x = a(\theta - \cos\theta)$; $y = a(1 - \sin\theta)$; $\theta = \frac{\pi}{3}$ ನ ಬಳಿ.

(3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $(a\operatorname{Sec}\theta,\ b\tan\theta)$ ಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿ.

(4) $y = x^2 + 2x + 1$; $(-3, 2)$ ಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿ.

7.2 ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಉಪಯೋಗ

$y = f(x)$ ಆದರೆ, $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. $\frac{dy}{dx}$ ಎನ್ನುವುದು y ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ ಎನ್ನುವುದೂ ತಿಳಿದಿದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಇನ್ನೊಂದು ವಿಶೇಷಾರ್ಥವೂ ಇದೆ.

$\frac{dy}{dx}$ ಅನ್ನು y ನ xನೊಂದಿಗಿನ **ಬದಲಾವಣೆಯ ದರ** ಎಂದೂ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಅರ್ಥವನ್ನು $\frac{dy}{dx}$ ಗೆ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಪ್ರಯೋಜನವು ಹಲವು ಮುಖಗಳಲ್ಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅದರ ಒಂದು ಪ್ರಯೋಜನವನ್ನು ಈಗ ವಿವೇಚಿಸೋಣ.

7.3 ವೇಗ (Velocity) ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ (acceleration)

ಒಂದು ಬಿಂದುವು, ಒಂದು ಸಮತಲ ವಕ್ರರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಚಲಿಸುವಾಗ, 's' ದೂರವನ್ನು 't' ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸಲಿ. ಆ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಆ ಬಿಂದುವು ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರ s ಎಂಬುದು t ವೇಳೆಯ ಉತ್ಪನ್ನ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

$$\therefore\ s = f(t)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವು,

$f'(t) = \frac{ds}{dt}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು, s ನ t ನೊಂದಿಗಿನ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವೆಂದೂ ಹೇಳಬಹುದು ಅಥವಾ ಆ ಬಿಂದುವಿನ **ಸ್ಥಳ ಬದಲಾವಣೆಯ ದರವೆಂದೂ** ಕರೆಯಬಹುದು.

ಆದರೆ '**ವೇಗ**'ದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯಿಂದ, ಇದು ವೇಗ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ. 'v' ವೇಗವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ,

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.}$$

$s = f(t)$ ಎಂಬ ಉತ್ಪನ್ನದ ಎರಡನೆಯ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ,

$$f''(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \text{ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$

$$= \frac{d}{dt}(v)$$

$$\therefore \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{d^2s}{dt^2}$ ಅನ್ನು 'ವೇಳೆ t ಯೊಂದಿಗೆ ವೇಗ v ಯ ಬದಲಾವಣಾದರ' ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ವೇಗದ ವೇಳೆಯೊಂದಿಗಿನ ಬದಲಾವಣಾದರವನ್ನು **ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವನ್ನು 'a' ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \text{ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.}$$

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $x = 2$ ಆದಾಗ, $\frac{x^2 - 1}{2x + 1}$ ಎಂಬುದರ ಬದಲಾವಣಾದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$y = \frac{x^2 - 1}{2x + 1} \text{ ಇರಲಿ.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x+1)\frac{d}{dx}(x^2-1) - (x^2-1)\frac{d}{dx}(2x+1)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{(2x+1)\ (2x) - (x^2-1)\ (2)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2x+2}{(2x+1)^2}$$

$x = 2$ ಆದಾಗ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,(2)^2 + 2\,(2) + 2}{(2\,(2)+1)^2}$$

$$= \frac{14}{25}$$

$\therefore$ ಬದಲಾವಣಾದರ $= \frac{dy}{dx} = \frac{14}{25}$

(2) ಒಂದು ಚೆಂಡನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಮೇಲಕ್ಕೆಸೆದಾಗ ಆ ಚೆಂಡು t ಸೆಕೆಂಡುಗಳಲ್ಲಿ s ಅಡಿಗಳಷ್ಟು ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು $s = 11t - 4t^2$. ಹಾಗಾದರೆ,

(i) ವಸ್ತುವಿನ ಪ್ರಾರಂಭ ವೇಗ,

(ii) ಹೊರಟ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ವಾಪಸ್ಸು ಬಂದಾಗ ಅದರ ವೇಗ,

(iii) ಅದು ಇಳಿಯಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸುವ ವೇಳೆಗೆ ಏರಿರುವ **ಎತ್ತರ,**

ಮತ್ತು (iv) ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ, ಇವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$s = 11t - 4t^2$ (ದತ್ತ)

ಹೊರಟ ಸ್ಥಳದಲ್ಲಿಯೇ ಇದ್ದಾಗ, $s = 0$

ಅಂದರೆ, $t = 0$ ಅಥವಾ $t = \frac{11}{4}$

ವೇಗ 'v' $= \frac{ds}{dt} = 11 - 8t$

$t = 0$ ಆದಾಗ, $v = 11$ ಅಡಿ/ಸೆಕೆಂಡು

$t = \frac{11}{4}$ ಆದಾಗ, $v = 11 - 8\left(\frac{11}{4}\right) = -11$ ಅಡಿ/ಸೆಕೆಂಡು

ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯ ಚೆಂಡು ಹೊರಟ ಸ್ಥಳಕ್ಕೆ ವಾಪಸ್ಸು ಬರುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

s ನ ಬೆಲೆ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ,

$\frac{ds}{dt} = 0$ ಮತ್ತು $\frac{d^2s}{dt^2}$ ಋಣವಾಗಿರಬೇಕು.

$$\frac{ds}{dt} = 11 - 8t = 0$$

$\therefore \; t = \frac{11}{8}$ ಸೆಕೆಂಡುಗಳು

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -8$$

$\therefore \; t = \frac{11}{8}$ ಆಗಿದ್ದಾಗ, s ನ ಬೆಲೆ ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\therefore$ ಅತ್ಯಧಿಕ ಎತ್ತರ $= 11\left(\frac{11}{8}\right) - 4\left(\frac{11}{8}\right)^2$

$$= \frac{484}{64}$$

$= 7\frac{9}{16}$ ಅಡಿಗಳು.

ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ $= -32$ ಅಡಿ/ಸೆಕೆಂಡು

ಅಭ್ಯಾಸ 7 (ಅ)

(1) ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಬದಲಾವಣಾದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(*a*) $x = -2$ ಆದಾಗ, $e^{2+x}.\log x$

(*b*) $x = 1$ ಆದಾಗ, $x^4 + 3x^3 + 2$

(*c*) $x = 3$ ಆದಾಗ, $\frac{2x}{\sqrt{x}}$

(2) ಒಂದು ವಸ್ತುವು ಕೆಳಕಂಡರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥಳ ಬದಲಾವಣೆ ಹೊಂದಿದರೆ.

(*a*) $s = 2t^3 + 3t + 1$ ಆದಾಗ ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷಗಳನ್ನು t ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) $s = \frac{2t-1}{t}$ ಆದಾಗ, t ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(3) $s = 2\sin t + 3\cos t$ ಆದರೆ t ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(4) ಒಂದು ವಸ್ತುವು $s = 3t^3 + 2t^2 + t$ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥಳ ಬದಲಾವಣೆಗೆ ಒಳಪಟ್ಟರೆ, ಅದರ ಪ್ರಾರಂಭ ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(5) ಒಂದು ವಸ್ತುವಿನ ಸ್ಥಳ ಬದಲಾವಣೆಯು, $s = 8t^4 + t^3 + 2t^2 - 3$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, 2 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಆ ವಸ್ತುವಿನ ವೇಗ ಮತ್ತು ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(6) ಎರಡು ಬಸ್ಸುಗಳು ಒಂದು ಸ್ಥಳದಿಂದ ಒಂದೇ ವೇಳೆಯಲ್ಲಿ ಹೊರಡುತ್ತವೆ. ಒಂದು ಪಶ್ಚಿಮ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಗಂಟೆಗೆ 80 ಕಿ.ಮೀ. ವೇಗದಲ್ಲೂ, ಮತ್ತೊಂದು ಉತ್ತರ ದಿಕ್ಕಿಗೆ ಗಂಟೆಗೆ 32 ಕಿ.ಮೀ ವೇಗದಲ್ಲೂ ಪಯಣಿಸುತ್ತವೆ. 2 ಗಂಟೆಯ ನಂತರ ಅವುಗಳ ನಡುವಣ ಅಂತರವು ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿರುತ್ತದೆ?

(7) ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಉದ್ದ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 1 ಸೆಂ.ಮೀ. ನಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾದರೆ, ತ್ರಿಜ್ಯದ ಉದ್ದ 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದಾಗ ಆ ವೃತ್ತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚುತ್ತದೆ?

(8) 2 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಏಣಿಯನ್ನು ಗೋಡೆಗೆ ಒರಗಿಸಿಡಲಾಗಿದೆ. ನೆಲದಮೇಲಿರುವ ತುದಿಯು, ಅದು ಗೋಡೆಗೆ 80 ಸೆಂ.ಮೀ. ದೂರದಲ್ಲಿರುವಾಗ, ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 15 ಸೆಂ.ಮೀ. ವೇಗದಲ್ಲಿ ಜಾರಿದರೆ, ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿ ಗೋಡೆಯ ಮೇಲೆ ಯಾವ ವೇಗದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ?

(9) ಒಂದು ಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನದ ಭುಜದ ಉದ್ದ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 2 ಸೆಂ.ಮೀ. ಗಳಷ್ಟು ವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದುತ್ತಿದ್ದರೆ, ಭುಜವು 8 ಸೆಂ.ಮೀ. ಆದಾಗ, ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದುತ್ತದೆ?

(10) ಒಂದು ಗೋಳಾಕಾರದ ಬೆಲೂನಿನ ಗಾತ್ರವು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 25 ಘ. ಅಂಗುಲ ದಂತೆ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವು 5″ ಆಗಿದ್ದಾಗ ಅದರ ಮೇಲ್ಮೈ ಸಲೆ (ವಿಸ್ತೀರ್ಣ) ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ವೃದ್ಧಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

(11) ಒಂದು ಶಂಖಾಕೃತಿಯ ತೊಟ್ಟಿಯ ತ್ರಿಜ್ಯ 2 ಅಡಿ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 8 ಅಡಿ ಇದೆ. ನೀರನ್ನು ನಿಮಿಷಕ್ಕೆ 2 ಘ. ಅಡಿಯಂತೆ ಬಿಟ್ಟರೆ, ನೀರಿನ ಆಳ 4 ಅಡಿ ಇದ್ದಾಗ, ನೀರಿನ ಮಟ್ಟವು ಯಾವ ದರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿರುತ್ತದೆ?

ಅಧ್ಯಾಯ 8

ಅನುಕಲನಕ್ರಿಯೆ

(INTEGRATION)

8.1 ಅನುಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯು ಭಿನ್ನ ಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯ ವಿಲೋಮವಾಗಿದೆ.

ಅನುಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ ಬಂದ ಫಲವನ್ನು **ಅನುಕಲನಾಂಕ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ $f(x)$ ನ ಅನುಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು $\int f(x).dx$ ಎಂಬ ಸಂಜ್ಞೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\sin x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವು $\cos x$ ಆಗಿದೆ. ಆದುದರಿಂದ $\cos x$ ನ **ಅನುಕಲನಾಂಕವು** $\sin x$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ, $\cos x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವು—$\sin x$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\sin x$ ನ ಅನುಕಲನಾಂಕವು—$\cos x$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

x ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವು 1 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 1 ರ ಅನುಕಲನಾಂಕವು x ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$\sin ax$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವು $a\cos ax$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\cos ax$ ನ ಅನುಕಲನಾಂಕವು $\frac{1}{a}\sin ax$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

x^{n+1} ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ $= (n+1)\,x^n$.

$$\therefore \int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

8.2 ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಅನುಕಲನಾಂಕಗಳು

ಉತ್ಪನ್ನ	**ಅನುಕಲನಾಂಕ**
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\text{Sec}^2 x$	$\tan x$

$\operatorname{cosec}^2 x$	$-\cot x$
$\sec x . \tan x$	$\sec x$
$\operatorname{cosec} x . \cot x$	$-\operatorname{cosec} x$
$\operatorname{Sin} ax$	$-\frac{1}{a} \cos ax$
$\cos ax$	$\frac{1}{a} \sin ax$
$\operatorname{Sec}^2 ax$	$\frac{1}{a} \tan ax$
$\operatorname{cosec}^2 ax$	$-\frac{1}{a} \cot ax$
$\sec ax . \tan ax$	$\frac{1}{a} \sec ax$
$\operatorname{cosec} ax . \cot ax$	$-\frac{1}{a} \operatorname{cosec} ax$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
e^x	e^x
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax}$
$\frac{1}{x}$	$\log x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$

$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\cot^{-1} x$
$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\sec^{-1} x$
$-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{cosec}^{-1} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\sin^{-1} \dfrac{x}{a}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a} \tan^{-1} \dfrac{x}{a}$
$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}$	$\dfrac{1}{a} \sec^{-1} \dfrac{x}{a}$

ಈಗ, $\sin x$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನ $\cos x$ ಎಂದು ಗೊತ್ತಿದೆ. ಆದರೆ, $\sin x + c$ [c = ನಿಯಂತಾಂಕ] ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವೂ ಕೂಡ $\cos x$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು $\cos x$ ನ ಅನುಕಲನಾಂಕವನ್ನು $\sin x + c$ [c = ನಿಯತಾಂಕ] ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಂಜ್ಞೆಯಲ್ಲಿ ಬರೆದರೆ,

$\int \cos x . dx = \sin x + c$ [c = ನಿಯತಾಂಕ]

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮುಖ್ಯ ಅನುಕಲನಾಂಕಗಳನ್ನು **ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸರಳ** ಅನುಕಲನಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $\int x^4 . dx = \dfrac{x^{4+1}}{4+1} = \dfrac{x^5}{5} + c$, **[$c$ = ನಿಯತಾಂಕ]**

(2) $\int \sin 4x . dx = -\frac{1}{4} \cos 4x + c$

(3) $\int \sec \frac{1}{3} x . \tan \frac{1}{3} x . dx = 3 \sec \frac{1}{3} x + c$

(4) $\int e^{1/4\, x} . dx = 4 e^{1/4\, x} + c$

8.3 ಅನುಕಲನಕ್ರಿಯೆಯ ಮುಂದಿನ ಅಭ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ತೊಡಗುವ ಮುಂಚೆ ಅದರ ಬಗ್ಗೆ ಮುಖ್ಯವಾದ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 1

$\int c.f(x).dx = c\int f(x)\,dx$ [c = ನಿಯತಾಂಕ]

ನಿಯತಾಂಕ ಮತ್ತು ಒಂದು ಉತ್ಪನ್ನದ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅನುಕಲನಾಂಕವು, ನಿಯತಾಂಕ ಮತ್ತು ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲನಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $\int 2\sec^2 2x\,dx = 2\int \sec^2 2x.dx$

$= 2.\frac{1}{2}\tan 2x$

$= \tan 2x + c$

(2) $\int 4x^2\,dx = 4\int x^2.dx$

$= 4.\frac{x^3}{3} + c$

ಪ್ರಮೇಯ 2

$\int \{f(x) + \phi(x)\}.dx$

$= \int f(x).dx + \int \phi(x)\,dx$

ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅನುಕಲನಾಂಕವು, ಆ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅನುಕಲ ನಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $\int (x^4 + 2\operatorname{cosec}^2 x)\,dx = \int x^4.dx + \int 2\operatorname{cosec}^2 x\,dx$

$= \int x^4.dx + 2\int \operatorname{cosec}^2 x.dx$

$= \frac{x^5}{5} + 2(-\cot x)$

$= \frac{x^5}{5} - 2\cot x + c$

(2) $\int (3x^{3/2} - x^{\frac{1}{2}} + 2)\, dx$

$$= \int 3x^{3/2}\, dx - \int x^{\frac{1}{2}}\, dx + \int 2dx$$

$$= 3\int x^{3/2}\, dx - \int x^{\frac{1}{2}}\, dx + 2\int dx$$

$$= 3 . \frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^{3/2}}{3/2} + 2x + c$$

$$= \tfrac{6}{5}\, x^{5/2} - \tfrac{2}{3}\, x^{3/2} + 2x + c$$

(3) $\int \frac{1}{x^5}\, dx = \int x^{-5}\, dx$

$$= \frac{x^{-4}}{-4}$$

$$= -\frac{1}{4x^4} + c$$

(4) $\int \frac{3x^5 + 2x^3 + x^2 + x - 2}{x^2}\, dx$

$$= \int \left(3x^3 + 2x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx$$

$$= 3\int x^3\, dx + 2\int x . dx + \int 1 . dx + \int \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$- 2\int x^{-2}\, dx$$

$$= \frac{3x^4}{4} + \frac{2x^2}{2} + x + \log x - 2\,\frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{3x^4}{4} + x^2 + x + \log x + 2\,\frac{2}{x} + c$$

(5) $\int \left(3 \sec \frac{1}{3}\, x \tan \frac{1}{3}\, x + \sec^2 3x\right) dx$

$$= 3\int \sec \frac{1}{3}\, x . \tan \frac{1}{3}\, x\, dx + \int \sec^2 3x . dx$$

$$= 3 . \frac{1}{1/3} \sec \tfrac{1}{3}\, x + \tfrac{1}{3} \tan 3x + c$$

$$= 9 \sec \tfrac{1}{3}\, x + \tfrac{1}{3} \tan 3x + c$$

ಅಭ್ಯಾಸ 8

ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅನುಕಲನಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(1) x^8

(2) $\sin 3x$

(3) $\frac{1}{x^3}$

(4) $\sqrt{x^3}$

(5) $(2x+1)^3$

(6) $\frac{1}{x^7}$

(7) $2x^2 - 3x + 4$

(8) $x^{-\frac{7}{8}} - x^{-\frac{8}{7}} + 2$

(9) $\frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sin x + 2\cos x$

(10) $\frac{x^3 + x^2 - 1}{x}$

(11) $x + 3\operatorname{cosec} x \cot x$

(12) $\frac{x^2 + x - 1}{\sqrt{x}}$

(13) $\frac{(x+1)^3}{\sqrt[3]{x^2}}$

(14) $\frac{(3x+2)^3}{x^2}$

(15) $4\sec^2 x + 5\operatorname{cosec}^2 x + 3$

(16) $3\sec 3x \tan 3x + x^3 - \frac{1}{x} +$

ಅಧ್ಯಾಯ 9

ಅನುಕಲನಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮಗಳು

9.1 ಯಾವುದಾದರೂ ಉತ್ಪನ್ನಕ್ಕೆ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೇರವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಾಗ ಆ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು, ಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುವಂತೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೀತಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಲು ಎರಡು ಮುಖ್ಯ ಕ್ರಮಗಳಿವೆ:

(1) ಆದೇಶಕ್ರಮ [Method of Substitution]

(2) ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ ಕ್ರಿಯೆ [Integration by Parts]

ಈ ಕ್ರಮಗಳನ್ನು ಈಗ ನಿರೂಪಿಸೋಣ.

9.2 ಆದೇಶ ಕ್ರಮ

x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ $f(x)$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವು $f'(x)$ ಆಗಿರಲಿ.

ಅಂದರೆ, $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$

ಈಗ, ನಾವು $\phi\{f(x)\}.f'(x)$ ನ ಅನುಕಲನಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದನ್ನು ಸಂಜ್ಞೆಯಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿದರೆ,

$$\int \phi\{f(x)\}f'(x).dx = ?$$

$f(x)$ ನ ನಿಷ್ಪನ್ನವು $f'(x)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ,

$f(x) = t$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಆಗ, $f'(x) = \frac{dt}{dx}$

ಅಂದರೆ, $f'(x).dx = dt$

$$\therefore \int \phi\{f(x)\}f'(x)\,dx = \int \phi(t).dt$$

ಈಗ ಸರಿಯಾದ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅನುಕಲನಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

9.3 ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳು

$\int f(x)\,dx = \phi(x)$ ಎಂದು ಇಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಆಗ,

(1) $\int f(x+a)\,dx$

$t = x + a$ ಇರಲಿ

$dt = dx$

$= \int f(t)\,dt$

$= \phi(t) \qquad [\because \int f(x)\,dx = \phi(x)]$

$= \phi(x+a)$

(2) $\int f(ax+b)\,dx$

$ax + b = t$ ಇರಲಿ

$adx = dt$

ಅಥವಾ $dx = \frac{dt}{a}$

$$\therefore \int f(ax+b)\,dx = \int f(t)\frac{dt}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\int f(t).dt$$

$$= \frac{1}{a}\phi(t).dt \quad [\because \int f(x)\,dx = \phi(x)]$$

$$= \frac{1}{a}\phi(ax+b)$$

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಂದ ಕೆಲವು ಅನುಕಲನಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು :

(i) $\int \frac{dx}{ax+b}$

$ax + b = t$ ಇರಲಿ

$dx = \frac{dt}{a}$

$$= \int \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{a}$$

$$= \frac{1}{a}\log t$$

$$= \frac{1}{a}\log(ax+b)$$

ಇದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ

(ii) $\int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)}$

(iii) $\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b}$

(iv) $\int \sin(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b)$

(v) $\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b)$

......ಇತ್ಯಾದಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $\int \frac{x}{x^2+1} \, dx$

$x^2+1 = t$ ಆಗಲಿ.

$2xdx = dt$

$xdx = \frac{dt}{2}$

ಈಗ, $\int \frac{x}{x^2+1} \, dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{2}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \, dt$

$= \frac{1}{2} \log t$

$= \frac{1}{2} \log(x^2+1) + c$

$\therefore \int \frac{x}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \log(x^2+1) + c$

(2) $\int \sqrt[3]{\tan^2 x} . \sec^2 x dx$

$\tan x = t$ ಆದರೆ

$\sec^2 x dx = dt$

$\therefore \int \sqrt[3]{\tan^2 x} \cdot \sec^2 x \cdot dx = \int \sqrt[3]{t^2} \, dt$

$= \int t^{1/3} \, dt$

$= \frac{t^{4/3}}{4/3}$

$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{\tan^4 x} + c \quad \therefore \int \sqrt[3]{\tan x}\,.\sec^2 x\, dx = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\tan^4 x} + c$

(3) $\int \frac{dx}{x(\log x)^2}$

$\log x = t$ ಇರಲಿ

$\frac{1}{x} ax = dt$

$\int \frac{dx}{x(\log x)^2} = \int \frac{1}{t^2} dt$

$= \int t^{-2} dt$

$= \frac{t^{-1}}{-1}$

$= -\frac{1}{t}$

$= -\frac{1}{\log x} + c$

$\int \frac{dx}{x(\log x)^2} = -\frac{1}{\log x} + c$

(4) $\int \tan x\, dx$

$= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$\cos x = t$ ಇರಲಿ

$\therefore\ -\sin x\, dx = dt$

$= \int -\frac{1}{t} dt$

$= -\log t = -\log\cos x + c$

$\therefore \int \tan x . dx = -\log\cos x + c$

ಅಥವಾ $\log\sec x + c$

(5) ಇದೇರೀತಿ, $\int \cot x . dx = \log\sin x + c$

(6) $\int \sin(3x+2)\, dx$

$= -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + c$

(7) $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$\sin^{-1} x = t$ ಆದರೆ

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = dt$$

$$\therefore \int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int t\,dt$$

$$= \frac{t^2}{2}$$

$$= \frac{(\sin^{-1} x)^2}{2} + c$$

$$\therefore \int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{(\sin^{-1} x)^2}{2} + c.$$

(8) $\int \frac{1}{(2x-3)^3}\, dx$

$$= \int (2x-3)^{-3}\, dx$$

$$= \frac{(2x-3)^{-2}}{2 \times (-2)}$$

$$= -\frac{1}{4(2x-3)^2} + c$$

$$\therefore \int \frac{1}{(2x-3)^3}\, dx = -\frac{1}{4(2x-3)^2} + c.$$

(9) $\int \frac{1}{(8-3x)^7}\, dx$

$$= \int (8-3x)^{-7}\, dx$$

$$= \frac{(8-3x)^{-6}}{-3(-6)}$$

$$= \frac{1}{18(8-3x)^6} + c$$

$$\therefore \int \frac{1}{(8-3x)^7}\, dx = \frac{1}{18(8-3x)^6} + c$$

(10) $\int \frac{xdx}{1+x^4}$

$$x^2 = t \text{ ಆದರೆ}$$
$$2xdx = dt$$
$$xdx = \frac{dt}{2}$$

$$\therefore \int \frac{xdx}{1+x^4} = \int \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2} \tan^{-1} t$$
$$= \tfrac{1}{2} \tan^{-1}(x^2) + c$$

(11) $\int \frac{1}{x^2 + 3x + 4} dx$

$$= \int \frac{1}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} dx$$

$$x + \tfrac{3}{2} = t \text{ ಆದ}$$
$$dx = dt$$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + t^2} dt$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)} \tan^{-1} \frac{t}{(\sqrt{7}/2)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \tan^{-1}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right) + c$$

$$\therefore \int \frac{1}{x^2 + 3x + 4} dx = \frac{2}{\sqrt{7}} \tan^{-1}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right) + c$$

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{-(4x^2 + 12x + 5)}} \cdot dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4-(2x+3)^2}} \, .dx$$

$2x+3 = t$ ಆದರೆ

$$dx = \frac{dt}{2}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4-t^2}} \cdot \frac{dt}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{2^2-t^2}} \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \, .\sin^{-1} \frac{t}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \, .\sin^{-1} \left(\frac{2x+3}{2}\right) + c$$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{-(4x^2+12x+5)}} \, dx = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{2x+3}{2}\right) + c.$$

9.4 ಕೆಲವು ತ್ರಿಕೋನಮಿತಿಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅನುಕಲನಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ತ್ರಿಕೋನಮಿತೀಯ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತ, ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಈಗ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ :

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $\int \sin^2 x \, dx$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\therefore \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$\therefore \int \sin^2 x . dx$

$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int 1 . dx - \int \cos 2x . dx\right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x\right) + c$$

(2) $\int \tan^4 x . dx$

$= \int \tan^2 x . \tan^2 x \, dx$

$= \int (\sec^2 x - 1) . \tan^2 x . dx$

$= \int \tan^2 x . \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x . dx$

(i) $\int \tan^2 x . \sec^2 x \, dx$

$\tan x = t$ ಆದರೆ

$\sec^2 x \, dx = dt$

$= \int t^2 \, dt$

$= \frac{t^3}{3} = \frac{\tan^3 x}{3}$

(ii) $\int \tan^2 x . dx = \int (\sec^2 x - 1) dx$

$= (\tan x - x)$

$\therefore \int \tan^4 x . dx = \int \tan^2 x . \sec^2 x . dx - \int \tan^2 x . dx$

$= \frac{\tan^3 x}{3} - (\tan x - x)$

$= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c.$

(3) $\int \sin 5x . \cos 3x . dx$

$2 \sin A \cos B = \sin (A + B) + \sin (A - B)$

$\therefore \sin 5x . \cos 3x = \frac{1}{2} [\sin 8x + \sin 2x]$

$\therefore \int \sin 5n . \cos 3x . dx$

$= \int \frac{1}{2} [\sin 8x + \sin 2x] \, dx$

$= \frac{1}{2} [- \frac{1}{8} \cos 8x - \frac{1}{2} \cos 2x]$

$= - \frac{1}{16} [\cos 8x + 4 \cos 2x] +$

ಅಭ್ಯಾಸ 9

ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅನುಕಲನಾಂಕಗಳನ್ನು x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

(1) $\tan^3 x \sec^2 x$;

(2) $\cos^3 x \sin x$

(3) $\sin^2 x \cos x$;

(4) $\tan^2 x$

(5) $\cot^2 x$;

(6) $\sin^6 x$

(7) $\cos^6 x$;

(8) $\tan^6 x$

(9) $\cot^6 x$;

(10) $\cot^4 x$

(11) $\sec^4 x$;

(12) $\operatorname{cosec}^4 x$

(13) $\cos^2 x$;

(14) $\sin^4 x$

(15) $\cos^4 x$;

(16) $\sin^3 3x$

(17) $\cos^3 3x$;

(18) $\tan^3 \frac{1}{2} x$

(19) $\cot^3 x$;

(20) $\sec^2 1/3\, x$

(21) $\operatorname{cosec}^2 \left(\frac{a}{2}\right) x$

(22) $\tan^2 3x$

(23) $\cot^2 \frac{1}{2} x$;

(24) $(\operatorname{cosec} x)^{3/2}.\cot x$

(25) $(\tan x)^{5/2}.\sec^2 x$

(26) $\cot^3 x.\operatorname{cosec}^2 x$

(27) $\sec \frac{1}{2} x.\tan \frac{1}{2} x$

(28) $\sin 2x + \cos 3x$

(29) $\operatorname{cosec} 2x \cot 2x$

(30) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

(31) $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$;

(32) $\dfrac{\sec \frac{1}{2} x \tan \frac{1}{2} x}{1 + \sec \frac{1}{2} x}$

(33) $\dfrac{\operatorname{cosec} 2x.\cot 2x}{1 + \operatorname{cosec}^2 2x}$;

(34) $\dfrac{\sec^2 3x}{\sqrt{1 + \tan 3x}}$

(35) $\dfrac{\operatorname{cosec} x \cot x}{\sqrt{1 - \operatorname{cosec} x}}$;

(36) $\dfrac{\cos \frac{1}{2} x}{\sqrt{1 + \sin \frac{1}{2} x}}$

(37) $\dfrac{1}{\cos^2 2x (1 + \tan 2x)}$

(38) $e^{\cot \frac{1}{4} x}.\operatorname{cosec}^2 \left(\frac{1}{4} x\right)$

(39) $e^{\tan x} \sec^2 x$;

(40) $\sin 8x \cos 6x$

(41) $\cos 3x \cos 2x$;

(42) $\sin 2x \cos 3x$

(43) $\cos 5x . \cos 9x$;

(44) $\sin 4x \ \sin 2x$

(45) $\sin 3x \ \sin 5x$;

(46) $\dfrac{\sin x \cos x}{1 + 2 \sin^2 x}$

(47) $\dfrac{\sec^2 x . \tan x}{1 + 2 \tan^2 x}$;

(48) $\dfrac{1}{3x + 2}$

(49) $\dfrac{1}{(2x - 3)}$;

(50) $\dfrac{16x^2 - 8x + 3}{4x - 1}$

(51) $\dfrac{x^5}{(a^6 - x^6)^2}$;

(52) $x \sqrt{a^2 - x^2}$

(53) $x^2 (x^3 + 1)^4$;

(54) $\dfrac{x^2}{(x^3 - 1)^3}$

(55) $\dfrac{x^7}{3 + 2x^8}$;

(56) $x^2 e^{x^3}$

(57) e^{5x-8} ;

(58) e^{4x-2}

(59) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$;

(60) $\dfrac{e^x}{e^{x+1}}$

(61) $\dfrac{e^{2x}}{1 - 3 e^{2x}}$;

(62) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(63) $\dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$;

(64) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

(65) $\dfrac{1}{1 + 4x^2}$;

(66) $\dfrac{x}{x^4 + 4}$

(67) $\dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$;

(68) $\dfrac{x}{x^2 + 2x + 3}$

(69) $\dfrac{1}{x^2 + x + 1}$;

(70) $\dfrac{1}{x^2 - 6x + 13}$

(71) $\dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$;

(72) $\dfrac{x}{9x^2 + 12x + 5}$

(73) $\dfrac{1}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$;

(74) $\dfrac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$

(75) $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2-6x-7}}$; (76) $\dfrac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

(77) $\dfrac{32x-8}{16x^2-8x+5}$; (78) $\dfrac{1}{(2x+3)\sqrt{4x^2+12x}}$

[ಸೂಚನೆ : $(2x+3)=t$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿರಿ.]

(79) $\dfrac{1}{(x+5)\sqrt{x^2+10x+9}}$; (80) $\dfrac{\left(\cos^{-1}\dfrac{x}{a}\right)^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

[ಸೂಚನೆ : $x+5=t$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿರಿ.]

(81) $\dfrac{\tan^{-1}x}{(1+x^2)}$; (82) $\dfrac{\operatorname{cosec}^{-1}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

ಅಧ್ಯಾಯ 10

ಪರಿಮೇಯ ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಅನುಕಲನಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಬಗೆ

10·1 $f(x)$ ಮತ್ತು $g(x)$ ಗಳು ಬಹುಪದರಾಶಿ (Polynomial) ಗಳಾಗಿದ್ದರೆ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ಪರಿಮೇಯ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$\frac{f(x)}{g(x)}$ ನ ಅನುಕಲನಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಕೆಲವು ಸರಳ ಉದಾಹರಣಗಳಿಂದ ನಿರೂಪಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $\int \frac{x^2+2}{x+5}\,dx$

ಇಲ್ಲಿ, ಅಂಶದ ಘಾತವು ಛೇದದ ಘಾತಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು.

ಆದ್ದರಿಂದ (x^2+2) ಅನ್ನು $(x+5)$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ,

$\frac{x^2+2}{x+5} = (x-5) + \frac{27}{x+5}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. $\therefore$

$$\int \frac{x^2+2}{x+5}\,dx = \int (x-5)\,dx + \int \frac{27}{x+5}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 5x + 27\log(x+5) + c$$

(2) $\int \frac{2}{x^2-4}\,dx$

$\frac{2}{x^2-4} = \frac{2}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$ ಇರಲಿ

$\therefore\ A(x-2) + B(x+2) = 2$

$x = 2$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$A(2-2) + B(2+2) = 2$$

$$\therefore\ B = \tfrac{2}{4} = \tfrac{1}{2}$$

ಮತ್ತೆ $x = -2$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$A(-2-2) + B(-2+2) = 2$$

$$\therefore\ A = -\tfrac{2}{4} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{2}{x^2-4} = \frac{(-\frac{1}{2})}{x+2} + \frac{(\frac{1}{2})}{x-2} = -\frac{1}{2(x+2)} + \frac{1}{2(x-2)}$$

$$\therefore\ \int \frac{2}{x^2-4}\,dx = -\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{2}\log(x+2) + \tfrac{1}{2}\log(x-2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + c$$

(3) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{6x^2-x-2}\,dx$

$$\frac{3x+1}{6x^2-x-2} = \frac{3x+1}{(2x+1)(3x-2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{3x-2}$$ ಇರಲಿ

$$\therefore\ A(3x-2) + B(2x+1) = 3x+1$$

$x = \tfrac{2}{3}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $B = \tfrac{9}{7}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಮತ್ತೆ $x = -\tfrac{1}{2}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, $A = \tfrac{1}{7}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$\therefore\ \frac{3x+1}{6x^2-x-2} = \frac{1}{7(2x+1)} + \frac{9}{7(3x-2)}$$

$$\int \frac{3x+1}{6x^2-x-2}\,dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{2x+1}\,dx + \frac{9}{7}\int \frac{1}{3x-2}\,dx$$

$$= \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{2}\log(2x+1) + \tfrac{9}{7}\times\tfrac{1}{3}\log(3x-2)$$

$$= \frac{1}{14}\log(2x+1) + \tfrac{3}{7}\log(3x-2) + c$$

ಅಭ್ಯಾಸ 10 (ಅ)

ಇವುಗಳ ಅನುಕಲನಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(1) $\frac{2x}{x-2}$; (5) $\frac{2x+3}{x^2-8x+16}$; (9) $\frac{1}{6x^2+7x-3}$

(2) $\frac{3-x^2}{x-3}$; (6) $\frac{3x+2}{4x^2-1}$; (10) $\frac{x+1}{12x^2-7x-12}$

(3) $\frac{x^3}{5x-2}$; (7) $\frac{1}{x^3-x}$; (11) $\frac{1}{x^2+3x+2}$

(4) $\frac{x+1}{x-1}$; (8) $\frac{2x^3+1}{2x^2+5x-3}$; (12) $\frac{x^2+2x}{6x-7x+2}$

10.2 ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ ಕ್ರಿಯೆ (Integration by Parts)

ಕೆಲವುಸಲ ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅನುಕಲನಾಂಕವು ನೇರವಾಗಿ ಸೂತ್ರದಿಂದಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಆದೇಶಕ್ರಮದಿಂದಾಗಲೀ ಬರುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $x \sin x$.

ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ನಾವು, ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಒಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ: u ಮತ್ತು v ಗಳು x ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿರಲಿ.

$$\frac{d}{dx}(uv) = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$$

$\frac{du}{dx}$ ಅನ್ನು u' ನಿಂದಲೂ ಮತ್ತು $\frac{dv}{dx}$ ಅನ್ನು v' ನಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸೋಣ.

$$\therefore \frac{d}{dx}(uv) = uv' + vu'$$

ಎರಡು ಕಡೆಗಳಲ್ಲೂ x ನ ಆಧಾರಕ್ಕೆ ಅನುಕಲನ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ,

$$uv = \int uv'\,dx + \int vu'\,dx$$

$$\therefore \int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx$$

$\therefore$ ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅನುಕಲನಾಂಕ $=$ (1 ನೆಯ ಉತ್ಪನ್ನ ಮತ್ತು 2 ನೆಯ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲನಾಂಕದ ಗುಣಲಬ್ಧ) $- \int$ (2 ನೆಯ ಉತ್ಪನ್ನದ ಅನುಕಲನಾಂಕ ಮತ್ತು 1 ನೆಯ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನದ ಗುಣಲಬ್ಧದ ಅನುಕಲನಾಂಕ).

ಈ ಸೂತ್ರದ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು **ಭಾಗಶಃ ಅನುಕಲನ ಕ್ರಿಯೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸೂಚನೆ : ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು, $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ ಎಂದೂ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $\int x \sin x\, dx$

ಇಲ್ಲಿ $u = x$ ಮತ್ತು $v' = \sin x$ ಆಗಿರಲಿ.

$$u' = 1\ ;\ v = \int \sin x\, dx = -\cos x$$

$$\int uv'\, dx = uv - \int vu'\, dx$$

$$\therefore \int x \sin x\, dx = -x\cos x - \int (-\cos x).1dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + c$$

(2) $\int x^2 \cos 2x\, dx$

$u = x^2$ ಮತ್ತು $v' = \cos 2x$ ಇರಲಿ.

$$u' = 2x\ ;\ v = \int \cos 2x\, dx = \tfrac{1}{2}\sin 2x$$

$$\therefore \int x^2 \cos 2x\, dx = \tfrac{1}{2}x^2 \sin 2x - \int (\tfrac{1}{2}\sin 2x)(2x)\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x\, dx$$

$\int x \sin 2x\, dx$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಇದರಲ್ಲಿ $u = x,\ v' = \sin 2x$ ಇರಲಿ.

$$u' = 1,\ v = \int \sin 2x\, dx = -\tfrac{1}{2}\cos 2x$$

$$\therefore \int x \sin 2x\, dx = x(-\tfrac{1}{2}\cos 2x) - \int (-\tfrac{1}{2}\cos 2x).1.dx$$
$$= -\tfrac{1}{2}x\cos 2x + \tfrac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$
$$= -\tfrac{1}{2}x\cos 2x + \tfrac{1}{4}\sin 2x$$

$$\therefore \int x^2 \cos 2x\, dx = \tfrac{1}{2}x^2 \sin 2x - (-\tfrac{1}{2}x\cos 2x + \tfrac{1}{4}\sin 2$$
$$= \tfrac{1}{4}(2x^2 \sin 2x + 2x\cos 2x - \sin 2x) +$$

(3) $\int \log x \, dx$

$= \int \log x . 1 . dx$

ಇಲ್ಲಿ $u = \log x$ ಮತ್ತು $v' = 1$ ಇರಲಿ.

$$u' = \frac{1}{x}, \quad v = \int 1 . dx = x$$

$$\therefore \int \log x \, dx = (\log x) x - \int x . \frac{1}{x} \, d$$

$$= x \log x - \int dx$$

$$= x \log x - x$$

$$= x (\log x - 1) + c$$

(4) $\int \cos^{-1} x dx$

$= \int \cos^{-1} x . 1 . dx$

ಇಲ್ಲಿ $u = \cos^{-1} x$, $v' = 1$ ಇರಲಿ.

$$u' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad v = x$$

$$\int \cos^{-1} x . dx = \cos^{-1} x . x - \int x . \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) . dx$$

$$= x \cos^{-1} x + \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

ಈಗ, $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$1 - x^2 = t$ ಆಗಿರಲಿ.

$$x dx = -\frac{dt}{2}.$$

$$\therefore \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{t}} \left(-\frac{dt}{2}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2} \int t^{-1/2} dt$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \int \cos^{-1} x\, dx = x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + c$$

ಇದೇ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಕೆಳಕಂಡ ರೀತಿಯಲ್ಲೂ ಮಾಡಬಹುದು.

$$\int \cos^{-1} x\, dx$$

$x = \cos\theta$ ಇರಲಿ $\therefore \cos^{-1} x = \theta$

$dx = -\sin\theta\, d\theta$

$$= \int \theta\,(-\sin\theta)\, d\theta$$

$$= -\int \theta \cdot \sin\theta\, d\theta$$

$u = \theta$ ಮತ್ತು $v' = \sin\theta$ ಇರಲಿ

$u' = 1,\quad v = -\cos\theta$

$$= -[\theta(-\cos\theta) - \int (-\cos\theta).1.d\theta]$$

$$= \theta\cos\theta - \int \cos\theta\, d\theta$$

$$= \theta\cos\theta - \sin\theta + c$$

$$= (\cos^{-1} x).x - \sqrt{1-\cos^2\theta} + c$$

$$= x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + c$$

(5) $\int xe^x\, dx$

$u = x$ ಮತ್ತು $v' = e^x$ ಇರಲಿ

$u' = 1,\ v = e^x$

$$\therefore \int x e^x\, dx = x.e^x - \int e^x.1.dx$$

$$= x.e^x - e^x$$

$$= e^x(x-1) + c$$

(6) $\int (x^2+3x+1)\sin 3x.dx$

$u = (x^2+3x+1)$ ಮತ್ತು $v' = \sin 3x$ ಇರಲಿ

$u' = (2x+3);\ v = -\frac{1}{3}\cos 3x$

$$\therefore \int (x^2+3x+1)\sin 3x.dx$$

$$-\frac{1}{3}(x^2+3x+1)\cos 3x + \frac{1}{3}\int (2x+3)\cos 3x.dx$$

$$-\frac{1}{3}(x^2+3x+1)\cos 3x$$

$$+\frac{1}{3}[(2x+3)(\frac{1}{3}\sin 3x) - \int(\frac{1}{3}\sin 3x)\,2dx]$$

$$= -\tfrac{1}{3}(x^2+3x+1)\cos 3x + \tfrac{1}{9}\left[(2x+3)\sin 3x - 2\int \sin 3x \,.dx\right]$$

$$= -\tfrac{1}{3}(x^2+3x+1)\cos 3x + \tfrac{1}{9}\left[(2x+3)\sin 3x + \tfrac{2}{3}\cos 3x\right]$$

$$= \frac{1}{27}\left[-9(x^2+3x+1)\cos 3x + 3(2x+3)\sin 3x + 2\cos 3x\right] + c$$

ಅಭ್ಯಾಸ 10 (ಆ)

(1) $x \cos x$

(2) $x \sin x . \cos x$

(3) $x^2 \cos 3x$

(4) $x^2 \cos 2x$

(5) $x \sec^2 x$

(6) $x \operatorname{cosec}^2 3x$

(7) $x \tan^2 x$

(8) $x^3 \sin x$

(9) $x \cot^2 x$

(10) $x^2 \sin x \cos x$

(11) $x \sin^2 x$

(12) $x \cos^2 x$

(13) $x^2 \sin 3x$

(14) $x^2 \sin 2x$

(15) $x \log x$

(16) $(x^2+3) \log x$

(17) $x^2 \log x$

(18) $x^2 e^{2x}$

(19) $x e^{1/2x}$

(20) $\tan^{-1} x$

(21) $\cos^{-1} x$

(22) $\sec^{-1} x$

(23) $x \cot^{-1} x$

(24) $x \sec^{-1} x$

(25) $x \operatorname{cosec}^{-1} x$

(26) $(x^3+3) \tan^{-1} x$

ಅಧ್ಯಾಯ 11

ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನಾಂಕಗಳು
[DEFINITE INTEGRALS]

$\phi(x)$ ಉತ್ಪನ್ನವು $f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ ನಿಷ್ಪನ್ನವಾಗಿರಲಿ. a ಮತ್ತು b ಗಳು **ಕೆಳಗಣ ಮತ್ತು ಮೇಲಣ ಮಿತಿಗಳಾದಾಗ** $\phi(x)$ ಉತ್ಪನ್ನದ **ಅನುಕಲನಾಂಕವು** $[f(b)-f(a)]$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ,

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = f(x)\Big]_a^b = f(b)-f(a)$$

$\int_a^b \phi(x)\,dx$ ಅನ್ನು $\phi(x)$ ನ, a ಯಿಂದ b ವರೆಗಿನ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನಾಂಕ ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ. 'a' ಮತ್ತು 'b' ಗಳನ್ನು **ಅನುಕಲನಕ್ರಿಯೆಯ ಮಿತಿಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನಕ್ರಿಯೆಗಳಲ್ಲಿ ನಿಯತಾಂಕವನ್ನು ಬರೆಯಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ.

ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಅನುಕಲನಾಂಕಗಳನ್ನು **ಅನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನಾಂಕಗಳು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಸರಳ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನಾಂಕಗಳ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಪರಿಚಯವನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

1) $\int_3^5 (x^2+2x+3)\,dx$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + 2.\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Big]_3^5$$

$$= \left(\frac{5^3}{3} + 5\cdot 5 + 3\cdot 5\right) - \left(\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3\cdot 3\right)$$

$$= \left(\frac{125}{3} + 25 + 15\right) - (9+9+9)$$

$$= \frac{245}{3} - 27$$

$$= \frac{164}{3}$$

$$= 54\tfrac{2}{3}.$$

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\, dx = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}.3\right) - \cos 0\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right]$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$

(3) $$\int_1^2 \log x\, dx$$

$$= \int_1^2 \log x . 1 . dx$$

$u = \log x,\ v' = 1$ ಆದರೆ

$u' = \frac{1}{x},\ v = x$

$$\int_1^2 \log x . 1 . dx = x \log x\Big]_1^2 - \int_1^2 x . \frac{1}{x}\, dx$$

$$= x \log x\Big]_1^2 - x\Big]_1^2$$

$$= (2\log 2 - \log 1) - (2 - 1)$$

$$= 2\log 2 - 1$$

(4) $$\int_0^1 \tan^{-1} x\, dx$$

$$= x\tan^{-1} x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= x\tan^{-1} x\Big]_0^1 - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2)\Big]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\log 2$$

(5) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{a^3 - x^3}}\, dx$

ಮೊದಲನೆಯ ಕ್ರಮ : $a^3 - x^3 = u$ ಇರಲಿ.

$$x^2\, dx = -\tfrac{1}{3}\, du$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^3 - x^3}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot (-\tfrac{1}{3})\, du$$

$$= -\tfrac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= -\tfrac{1}{3} \cdot \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} = -\tfrac{2}{3}(a^3 - x^3)^{1/2}$$

$$= -\tfrac{2}{3}\sqrt{a^3 - x^3}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{a^3 - x^3}}\, dx = -\frac{2}{3}\sqrt{a^3 - x^3}\Big]_0^1$$

$$= -\tfrac{2}{3}\left[\sqrt{a^3 - 1} - \sqrt{a^3 - 0}\right]$$

$$= \tfrac{2}{3}\left[\sqrt{a^3} - \sqrt{a^3 - 1}\right]$$

ಎರಡನೆಯ ಕ್ರಮ : $a^3 - x^3 = u$ ಇರಲಿ.

$$x^2\, dx = -\tfrac{1}{3}\, du$$

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಮಿತಿಗಳನ್ನು ಕೂಡ u ಚರಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಬದಲಾಯಿಸೋ

$x = 0$ ಆದಾಗ, $u = a^3 - x^3 = a^3 - 0 = a^3$

$x = 1$ ಆದಾಗ, $u = a^3 - 1$

$$\therefore \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{a^3 - x^3}} \cdot dx = \int_{a^3}^{a^3-1} \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot (-\tfrac{1}{3}\, du)$$

$$= -\tfrac{1}{3}\int_{a^3}^{a^3-1} \frac{u^{-1/2}}{1}\, du$$

$$= -\tfrac{2}{3}\sqrt{u}\Big]_{a^3}^{a^3-1}$$

$$= -\tfrac{2}{3}\left[\sqrt{a^3-1}-\sqrt{a^3}\right]$$
$$= \tfrac{2}{3}\left[\sqrt{a^3}-\sqrt{a^3-1}\right]$$

ಕೆಲವು ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಕ್ರಮದಿಂದ ನಮಗೆ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನಾಂಕವು ಸುಲಭವಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

(6) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

$x = \sin\theta$ ಇರಲಿ

$dx = \cos\theta\, d\theta$

$x = 0$ ಆದಾಗ, $\sin\theta = 0 \quad \therefore \theta = 0$

$x = 1$ ಆದಾಗ $\sin\theta = 1 \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,.\cos\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,.\cos\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right).d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}\sin 2.\tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$= \tfrac{\pi}{4}$$

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{5+5\sin\theta+4\cos\theta}$

$\tan\frac{\theta}{2} = t$ ಇರಲಿ

$\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\, d\theta = dt$

$$d\theta = \frac{2dt}{\sec^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2dt}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2dt}{1+t^2}$$

ಹಾಗೆಯೇ, $\sin\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

ಮತ್ತು $\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{1-t^2}{\;}$

$\theta = 0$ ಆದಾಗ, $t = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ, $t = \tan\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{5+5\sin\theta+4\cos\theta}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{5+5\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)+4\left(\frac{1-}{1+}\right.}$$

$$= \int_0^1 \frac{1+t^2}{5(1+t^2)+10t+4(1-t^2)}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{9+10t+t^2}\,dt$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{(t+9)(t+1)}\,dt$$

$$= 2\int_0^1 \left[\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{(t+1)}-\frac{1}{(t+9)}\right\}\right]dt$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{t+9}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\log(t+1) - \log(t+9)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\left[\log\frac{t+1}{t+9}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}\left[\log\frac{2}{10} - \log\frac{1}{9}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\log\frac{9}{5}$$

(8) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+5\cos x}$$

$\tan\frac{x}{2} = t$ ಇರಲಿ

$x = 0$ ಆದಾಗ, $t = 0$ $\qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$x = \frac{\pi}{2}$ ಆದಾಗ, $t = 1$ $\qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+5\cos x} = \int_0^1 \frac{1}{4+5\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{9-t^2}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dt}{(3+t)(3-t)}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{6}\left[\frac{1}{3+t} + \frac{1}{3-t}\right]dt$$

(15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$

(16) $\int_0^1 x \tan^{-1} x \, dx$

(17) $\int_0^1 x \sin^{-1} x \, dx$

(18) $\int_0^1 \cos^{-1} x \, dx$

(19) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 x \, dx$

(20) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \, dx$

(21) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx$

(22) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\cos x} . \sin x \, dx$

(23) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \tan^2 x \, dx$

(24) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + 3 \sin x}$

(25) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{3 + 4 \cos \theta}$

(26) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + 3 \sin x + 4 \cos x}$

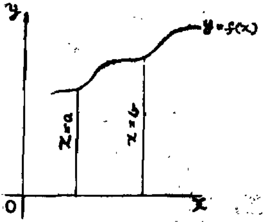
(27) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{6 + 4 \sin \theta - 3 \cos \theta}$

(28) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 - 4 \sin x}$

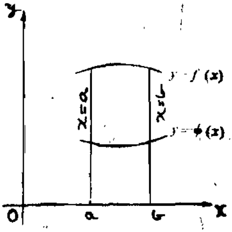
ಅಧ್ಯಾಯ 12

ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು

(AREAS)



ಚಿತ್ರ 5 (a)



ಚಿತ್ರ 5 (b)

$y = f(x)$ ಉತ್ಪನ್ನ, $x = a$ ಮತ್ತು $x = b$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಲಂಬಗಳು ಮತ್ತು x–ಅಕ್ಷ. ಇವುಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ [ಚಿತ್ರ 5(a)] ಒಂದು ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\int_a^b f(x)\,dx$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.

$$\therefore \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ } A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$f(x)$ ಮತ್ತು $\phi(x)$ ಎರಡು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಾಗಿದ್ದು **[*a*, *b*]** ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿ ಆ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ x ನ ಬೆಲೆಗಳು ಗೊತ್ತಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $f(x) \geqslant \phi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ ಆಗಿರಲಿ [ಚಿತ್ರ 5 (b)].

ಆಗ, ಆ ಎರಡು ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಪ್ರದೇಶದ **ವಿಸ್ತೀರ್ಣ**

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \phi(x)\,dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - \phi(x)]\,dx$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು

(1) $y = x^3$ ಎಂಬ ಒಂದು ವಕ್ರರೇಖೆ. x–ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು $x = 4$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಭುಜ ಇವುಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು?

$y = f(x)$ ವಕ್ರರೇಖೆ, x–ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು $x = a$, $x = b$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಭುಜಗಳು ಇವುಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $A = \int_a^b y\,dx$.

ಇಲ್ಲಿ, $y = x^3$ ವಕ್ರರೇಖೆಯು ಮೂಲ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ. $\therefore a = 0,\ b = 4$

$$\therefore \text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ } A = \int_0^4 x^3\,dx.$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4$$

$$= \frac{4^4}{4}$$

$= 64$ ಚದರ ಮಾನಗಳು

(2) $y = x^2 + x + 1$ ವಕ್ರರೇಖೆ, $x = 1$ ಮತ್ತು $x = 2$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು x–ಅಕ್ಷ ಇವುಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು?

ಇಲ್ಲಿ, $y = x^2 + x + 1,\ a = 1,\ b = 2$

$$\therefore \text{ವಿಸ್ತೀರ್ಣ } = \int_1^2 (x^2 + x + 1)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg]_1^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2\right) - \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + 1\right)$$

$= 4\frac{5}{6}$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

(3) $x = 1$, $x = 2$, $y = 3x$ ಮತ್ತು $y = x^2$ ವಕ್ರರೇಖೆ, ಇವುಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ಪ್ರದೇಶದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು?

ಇಲ್ಲಿ, $f(x) = 3x,\ \phi(x) = x^2$

$a = 1,\ b = 2$

[1, 2] ಅವಕಾಶದಲ್ಲಿ $f(x) \geqslant \phi(x)$

$$\therefore \text{ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ } = \int_a^b [f(x) - \phi(x)]\, dx$$

$$= \int_1^2 (3x - x^2)\, dx$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_1^2$$

$$= \left(3 \cdot \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{13}{6} \text{ ಚದರ ಮಾನಗಳು.}$$

(4) $y = 6x^2 - x - 2$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆ ಹಾಗೂ x–ಅಕ್ಷಗಳ ನಡುವಣ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವೇನು?

$y = 0$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$6x^2 - x - 2 = 0$$

$$(2x + 1)(3x - 2) = 0$$

$\therefore x = -\frac{1}{2}$ ಅಥವಾ $\frac{2}{3}$

$$\text{ಬೇಕಾಗುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ } = \int_a^b y\,dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} y\,dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} (6x^2 - x - 2)\, dx$$

$$= \left(\frac{6x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(2x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}$$

$$= -\frac{343}{216} \text{ ಚದರ ಮಾನಗಳು}$$

(ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು x–ಅಕ್ಷದ ಕೆಳಗಡೆಯಿರುವುದರಿಂದ ಋಣಚಿಹ್ನೆ ಇದೆ.)

(5) $y = x^2$ ಮತ್ತು $y = 2x$ ಎಂಬ ವಕ್ರರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಇರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ದತ್ತ : $y = x^2$............ (1)

$y = 2x$............ (2)

2 ನೆಯ ಸಮೀಕರಣದ y ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು, 1 ನೆಯ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$2x = x^2$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂದರೆ, $x(x-2) = 0$

$\therefore\ x = 0$ ಅಥವಾ $x = 2$

ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾಗಿರುವ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \int_0^2 (x^2 - 2x)\, dx$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Big]_0^2$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big]_0^2$$

$$= \frac{2^3}{3} - 2^2$$

$$= -\frac{4}{3}$$ ಚದರ ಮಾನಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 12

ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೇರೆಗಳಿಂದ ಆವೃತವಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

(1) $y = x + \frac{1}{x}$ ಎಂಬ ರೇಖೆ, $x = 2$ ಮತ್ತು $x = 4$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು x–ಅಕ್ಷ.

(2) $y = x^2 - x + 1$ ಎಂಬ ರೇಖೆ, $x = 0$ ಮತ್ತು $x = 4$ ಎಂಬಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಭುಜಗಳು; x–ಅಕ್ಷ.

(3) $y = \frac{3}{x^3}$ ಎಂಬ ರೇಖೆ, $x = 2$ ಮತ್ತು $x = 4$ ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಭುಜಗಳು; x — ಅಕ್ಷ.

(4) $y = 3x^2 - 2x + 1$ ಎಂಬ ರೇಖೆ, $x = 1$ ಮತ್ತು $x = 2$ ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಭುಜಗಳು; x–ಅಕ್ಷ.

(5) $y = \sin x$ ಎಂಬ ರೇಖೆ, $x = \frac{1}{3}\pi$ ಮತ್ತು $x = \frac{1}{2}\pi$ ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಭುಜಗಳು ; x–ಅಕ್ಷ.

(6) $y = \cos x - \sin x$ ಎಂಬ ರೇಖೆ, $x = 0$ ಮತ್ತು $x = \frac{\pi}{4}$ ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಭುಜಗಳು ಮತ್ತು x–ಅಕ್ಷ.

(7) $y = \tan x$ ಎಂಬ ರೇಖೆ. x–ಅಕ್ಷ: $x = 0$ ಯಿಂದ $\frac{\pi}{4}$ ವರೆಗೆ.

(8) $y = \tan^2 x$ ಎಂಬ ರೇಖೆ. x–ಅಕ್ಷ: $x = 0$ ಯಿಂದ $\frac{\pi}{4}$ ವರೆಗೆ.

(9) $y^2 = 4x$ ಎಂಬ ರೇಖೆ. y–ಅಕ್ಷ. $y = 3$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆ.

(10) $y = x - 3x^2$ ಎಂಬ ರೇಖೆ. x–ಅಕ್ಷ.

(11) $y = 9x^2 - 9x + 2$ ಎಂಬ ರೇಖೆ : x–ಅಕ್ಷ.

(12) $y = -x^2 + 3x + 2$ ಎಂಬ ರೇಖೆ : x–ಅಕ್ಷ.

(13) $y = 3x^2 - x - 2$ ಎಂಬ ರೇಖೆ : x–ಅಕ್ಷ.

(14) $y = 6x^2 + x - 2$ ಎಂಬ ರೇಖೆ ; x–ಅಕ್ಷ.

(15) $y = x^2$ ಮತ್ತು $y = 3x - 2$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು.

(16) $y^2 = 4x$ ಮತ್ತು $x^2 = 4y$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು.

(17) $y = 3x^2$ ಮತ್ತು $y = 5x + 2$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು.

(18) $y^2 = 4ax$ ಮತ್ತು $x^2 = 4ay$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು.

(19) $y = x^2$ ಮತ್ತು $y = 2x$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು.

(20) $y = \sin x$ ಮತ್ತು $y = \sin 2x$ $(0 \le x < \pi)$ ಎಂಬ ರೇಖೆಗಳು.

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 1

(1) -1 (2) 0 (3) 10 (4) 108 (5) $\frac{343\sqrt{7}}{2}$ (6) $\frac{1}{2\sqrt[4]{a}}$ (7) 48

(8) 3 (9) 6 (10) $20\sqrt{5}$ (11) $5\sqrt{4}$ (12) 4 (13) $\sqrt{2}$ (14) $\frac{1}{3}$

(15) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (16) $\frac{1}{2}$ (17) 0 (18) -5 (19) $\frac{1}{8}$ (20) $\frac{8}{8}$ (21) 1

(22) $\frac{3}{7}$ (23) $\frac{1}{2}$ (24) $\frac{1}{3}$ (25) $\frac{5}{2}$ (26) m (27) $\frac{m}{n}$ (28) 1 (29) $\frac{5}{7}$

(30) $\frac{5}{5}$ (31) 1 (32) 1

ಅಭ್ಯಾಸ 2

I (1) 1 (2) $3x^2$ (3) $2x+2$ (4) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (5) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$

(6) $2\cos 2x$ (7) $-2\sin 2x$ (8) $4x^3$ (9) $\frac{3}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}$

(10) $2(x+1)$ (11) $-\frac{2}{x^3}$ (12) $3x^2+3$

II (1) $2ax+b$ (2) $4x^3+2x$ (3) $6x+1$ (4) $5x^4-7$

(5) $\frac{3}{2}\sqrt{x}+10x$ (6) $6x^5+3x^2+1$ (7) $12x^{11}+21x^6-12x^4$

(8) $-\frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{3x})^2}{\sqrt{x}}$ (9) $nx^{n-4}+\operatorname{cosec} x\cot x$

(10) $3\cos x+4$ (11) $-4\operatorname{cosec} x\cot x-7\operatorname{cosec} 2x-5\sin x$

(12) $6x+4\sin+\cos x$

III (1) $3x^2-4x-32$ (2) $6x^5-12x^3-15x^2+14x+15$

(3) $9x^3+32x^7+28^6-21x^2-56x-28$

(4) $\frac{3x^2+12x+1}{2\sqrt{x+1}}$ (5) $13x^{12}+12x^{11}-1$

(6) $3x^2 + 18x + 26$

(7) $147x^6 - 90x^5 - 210x^4 + 120x^3 + 42x^2 - 20x - 28$

(8) $27x^2 + 174x + 259$ (9) $2x \tan x + x^2 \sec^2 x$;

(10) $3x^2 \operatorname{cosec} x - x^3 \operatorname{cosec} x \cot x$

(11) $2x(3 \sin x - 4 \cos x) + (x^2 + 1)(3 \cos x + 4 \sin x)$

(12) $\sec x(1 + 2 \tan x + x \tan x)$

(13) $2x \cot x - x^2 \operatorname{cosec}^2 x + 3 \operatorname{cosec} x - 3x \operatorname{cosec} x \cot x - 5$

(14) $-\sin x$ (15) 0 (16) $2x \sin x \cos x + x^2 \cos 2x$

(17) $x^3 \sec^2 x + 3x \sec x \operatorname{cosec} x - x^3 \operatorname{cosec}^2 x$

(18) $-3 \cos^2 x \sin x$

IV (1) $\dfrac{2}{(1-x)^2}$ (2) $\dfrac{x^2 - 2x - 4}{(x-1)^2}$ (3) $\dfrac{4a^2 x}{(a^2 - x^2)^2}$

(4) $\dfrac{6x^2}{(x^3+1)^2}$ (5) $\dfrac{2(1-x^2)}{(1-x+x^2)^2}$ (6) $\dfrac{12(x^3-1)}{x^3+3x+2}$

(7) $\dfrac{2 \sin x}{(1+\cos x)^2}$ (8) $\dfrac{-2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$ (9) $\dfrac{2}{(\cos x - \sin x)^2}$

(10) $\dfrac{-4 \sec x \operatorname{cosec} x}{(\tan x - \cot x)^2}$ (11) $\dfrac{-4 \cos x}{(2 \sin x - 1)^2}$ (12) $\dfrac{14 \operatorname{cosec} x \cot x}{(7 + \operatorname{cosec} x)^2}$

(13) $\tan x \sec x$ (14) $\dfrac{-(1+\cos x)}{\sin^2 x}$ (15) $\dfrac{-2(2ax+b)}{(ax^2+bx-c)^2}$

(16) $\dfrac{x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - \sin x}{\cos^2 x}$ (17) $\sec^2 x$

(18) $\dfrac{-42 \sec x \tan x}{(3 \sec x - 7)^2}$

V (1) $\dfrac{x^3 \cos x - x^2 \sin x + x \cos x + \sin x}{(x^2+1)^2}$

(2) $\dfrac{4x^5 - 5x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{(x-1)^3}$

(3) $\dfrac{x^4 \sec^2 x - x^2 \sec^2 x - 2x \tan x}{(x^2-1)^2}$

(4) $\dfrac{x^3+3x^2+2}{(x+1)^3}$ (5) $\dfrac{-x^2\sin x+x\sin x-\cos x}{(\;\;+1)^2}$

(6) $\dfrac{-x\sec x\,(x^2\tan x-3x\tan x+x-6)}{(3-x)^2}$

(7) $\dfrac{1-\cot^2 x-2\;(x+1)\;\sec x\operatorname{cosec} x}{(\tan x-\cot x)^2}$

(8) $\dfrac{x\operatorname{cosec} x\,(2-x^3\cot x-x\cot x)}{(x^2+1)^2}$

ಅಭ್ಯಾಸ 3

I $3(x+1)^2$; $12\;(2+3x)^3$; $-28\,(3-4x)^6$ $56\,(7x-6)^7$;

$\dfrac{9\,(4x+3)}{10\,(2x^2+3x-2)^{1/10}}$; $\dfrac{2}{n}\,(2x+3)^{\frac{1-n}{n}}$; $-\dfrac{1}{(2x-3)^{3/2}}$;

$\dfrac{7}{4}\cdot(7x-5)^{\frac{-3}{4}}$.

II $\dfrac{x}{2\sqrt[4]{(2+x^2)^3}}$; $\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$; $\dfrac{-1}{2\,(x-1)^{3/2}}$; $\dfrac{-(3x+1)}{(3x^2+2x+1)^{3/2}}$.

III $2x\cos\,(x^2-4)$; $-3.\cos^2(x+1)\;\sin(x+1)$; $-2\operatorname{cosec}$ $(2x+3)\cot(2x+3)$;

$-6\sin(\cos 3x).\cos(\cos 3x)\sin 3x$;

$6x.\tan\;(x^3+1)\;\sec^2(x^3+1)$; $-12\,(3x-1)\;\cot\;(3x-1)^2$ $\operatorname{cosec}^2(3x^2-1)^2$;

$9\sec^3(3x+2)\tan(3x+2)$; $-\sin\alpha\sin(x\sin\alpha)$; $2\cos 2x$;

$-2\sin 2x$; $a\sec^2 ax$; $a\sec ax\tan ax$; $-a\operatorname{cosec} ax\cot ax$;

$\dfrac{-3}{2}\sqrt{\operatorname{cosec}(3x+1)}\;\cot(3x+1)$;

$\dfrac{-2}{\sqrt{2x-3}}\,(\cos\sqrt{2x-3}\,\sin\sqrt{2x-3})$;

$\dfrac{\cos\sqrt{x+1}}{6\sqrt{x+1}\;\sqrt[3]{\sin^2\sqrt{x+1}}}$; $3x\;\sqrt{\tan(x^2+1)}\cdot\sec^2(x^2+1)$;

$\dfrac{-\cot^2 \sqrt[3]{x+1}\,.\,\operatorname{cosec}^2 \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)}}$; $\frac{3}{2}\sec^{3/2} x \tan x$;

$-\sin(\sin x)\cos x$;

$-6\tan(\operatorname{cosec} 3x)\sec^2(\operatorname{cosec} 3x)\operatorname{cosec} 3x \cot 3x$;

IV $\dfrac{3x-1}{2(3x-2)^{3/2}}$; $\dfrac{(x+1)^2(7x-5)}{2\sqrt{x-1}}$; $\dfrac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}\,(1+x)^{3/2}}$; $\dfrac{-2a^2 x}{\sqrt{a^2-x^2}\,(a^2+x^2)^{3/2}}$; $\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$;

$3(x^2-1)^2\sin^2 x\,[(x^2-1)\cos x + 2x\sin x]$;

$\dfrac{-(1+2x)}{\sqrt{1-x-x^2}\,.\,(1+x+x^2)^{3/2}}$; $21\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(3x-\dfrac{3}{x}\right)^6$;

$x(x^2-1)^3(15x^7-7x^5+8)$; $4\sqrt{x+1}\tan^3 x\sec^2 x$

$+\dfrac{\tan^4 x}{2\sqrt{x+1}}$;

$\dfrac{14(7x-2)(7x+1)^2}{(7x-1)^2}$; $\dfrac{4n(2+x)^{n-1}}{(2-x)^{n+1}}$; $\dfrac{(x+1)^{1/2}}{2(1-x^2)^{3/2}}$.

V $(3\cos 2x\cos 3x - 2\sin 2x\sin 3x)$; $\sin 2x\cos 2x$; 0;

$(\cos x\cos^2 3x - 3\sin x\sin 6x)$.

VI $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1-x)}$; -1 ; -1 ; $\dfrac{-\sqrt{a}}{(x-a)\sqrt{1-x}}$. $\dfrac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$;

$\dfrac{-2x}{\sqrt{a^4-x^4}}$; $\dfrac{-ab}{a^2+b^2x^2}$; $\dfrac{6(1+x^2)}{(1-x)\sqrt{(1-x)^6-(1+x)^6}}$;

$\dfrac{x\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\,(1+\sin^2\sqrt{x^2+1})}$; $\dfrac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}$; -1 ;

$\dfrac{-\sqrt{2}}{x+1}$; $\dfrac{\sqrt{1-e^2}\sec^2\frac{x}{2}}{2[\sec^2\frac{x}{2}+e(1-\tan^2\frac{x}{2})]}$;

$\dfrac{\sin a}{1-2x\cos x+x^2}$; $\dfrac{-1}{1+x^2}$.

VII $\left(\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+\cos^{-1}x\right)$; $\left(\dfrac{-x^2}{1+x^2}+2x\cot^{-1}x\right)$;

$\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+\sin^{-1}x\right)$; $\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+\cos^{-1}x\right)$;

$\left(\dfrac{-1}{x\sqrt{x-1}}+\dfrac{\operatorname{cosec}^{-1}x}{2\sqrt{1+x}}\right)$; $\dfrac{-6x(\cot^{-1}x^2)^2}{(1+x^4)}$;

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}}+\sec^{-1}x\right)$; $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x^2)}+\tan^{-1}x\right)$.

VIII $\dfrac{-\sin(\tan^{-1}x)}{1+x^2}$; $\dfrac{-\operatorname{cosec}^2(\tan^{-1}x)}{1+x^2}$;

$\dfrac{-a\sin(a\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}$; $\dfrac{-\sec(\cos^{-1}x)\tan(\cos^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

ಅಭ್ಯಾಸ 4

I (1) $\dfrac{4a}{y}$ (2) $\dfrac{-x}{y}$ (3) $\dfrac{-b^2x}{a^2y}$ (4) $\dfrac{b^2x}{a^2y}$ (5) $\dfrac{-y^{1/3}}{x^{1/3}}$

(6) $\dfrac{-y}{x}$ (7) $\dfrac{-(5x^4+6x^2y^3)}{(6x^3y^2+5y^4)}$ (8) $\dfrac{x^2}{y^2}$

(9) $\dfrac{-(ax+by+g)}{bx+by+f}$ (10) $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$ (11) $\dfrac{y^2(1-x^2y)}{x^2(xy^2-1)}$

(12) $\dfrac{-y\sin(xy)}{1+x\sin(xy)}$ (13) $\dfrac{-[2x+\sin 2(x+y)]}{\sin 2(x+y)}$

(14) $\dfrac{x[\cos(x^2-y^2)-1]}{y[1+\cos(x^2-y^2)]}$ (15) $\dfrac{x^2+ay-(x+y)^2}{(x+y)^2-ax-by^2}$

(16) $\dfrac{y}{x}$ (17) $\dfrac{\tan y+y\operatorname{cosec}^2x}{\cot x-x\sec^2y}$ (18) $\dfrac{3\cos 3x-1}{4\sin y}$

(19) $\dfrac{-3y}{2x}$ (20) $\dfrac{2\cos 2x-4\sec^2(4x+y)}{\sec^2(4x+y)}$

II (1) $\dfrac{1}{t}$ (2) $\dfrac{-(b\cos\theta+a\sin\theta)}{b\sin\theta+a\cos\theta}$ (3) $\dfrac{-b}{a}\cot^2\theta$

(4) $-\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (5) $\frac{-b}{a}\cot^3\theta$ (6) $\frac{-b}{a}\tan\theta$

(7) $\frac{2\sqrt{2t}}{\sqrt{c}}$ (8) $\frac{-b}{a}\tan\theta$ (9) $\frac{t+1}{t-1}$

10) $\frac{2t}{\sqrt{t-1}}$.

1) $4e^{4x}$ (2) $a^{(ax+b)}$ (3) $3e^{3x-4}$ (4) $e^{3x}(3\cos 2x - 2\sin 2x)$

(5) $e^{2x+1}[2\cos 3x\cos 2x - 3\sin 2x\sin 3x + 2\cos 3x\sin 2x]]$

(6) $e^{-2x}[\sec^2 x - 2\tan x]$ (7) 0 (8) $\frac{4e^{2x}}{(1-e^{2x})^2}$

(9) 2 (10) $\frac{2e^{3x}(3x-1)}{(x-e^{3x})^2}$ (11) $\sec x \operatorname{cosec} x$

2) $\tan x$ (13) $\frac{2x}{\sin(x^2+5)}$ (14) $\frac{2x+1}{x^2+x-1}$

5) $\frac{2(x^2-1)}{x^4+x^2+1}$ (16) $x(1+2\log x)$ (17) $\frac{1}{2(x+1)}$

8) $a^x\log a$ (19) $2\cos x\sec(\sin x)\operatorname{cosec}(\sin x)$

:0) $-3x^2\sec x^3\operatorname{cosec} x^3$ (21) $3^x(2\cos 2x + \log 3.\sin 2x)$

:2) $4^{5x}.[5\log 4.\operatorname{cosec} 3x - 3\operatorname{cosec} 3x\cot 3x]$

:3) $\frac{(24x^5+40x^4-33x^3-44x^2+19x+4)}{2\sqrt{x^2-1}.(x^2+x-1)^{3/2}}$

:4) $\frac{-\operatorname{cosec} x[(x^2+1)\cot x+(x^2-10x+3)]}{(x+5)^4}$

:5) $\frac{-\operatorname{cosec}^2(\log 3x)}{x}$ (26) $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

:7) $\sec(x+1)\tan(e^{2x}).[4e^{2x}\sec^2 e^{2x} + \tan(x+1)\tan e^{2x}]$

:8) $\frac{4x}{2x^2+3}$.

IV (1) $\frac{-y}{x}$ (2) $\frac{2-3x^2y^3}{3x^3y^2}$ (3) $\frac{bt}{a(t+1)}$ (4) $-b\tan^3 t$

(5) $-e^{(\cos t-\sin t)}.\tan t$ (6) $\frac{-3}{2}e^{(3\cot-2\tan t)}.\cot^2 t$.

ಅಭ್ಯಾಸ 5

1. (i) $12x^2$ (ii) $(30\,ax^4+6b)$ (iii) $\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

(iv) $\frac{4}{(1+x)^3}$ (v) $2\sec^2 x\ (2\tan^2 x+\sec^2 x)$

(vi) $2\sec^2 x(2\tan^2 x+\sec^2 x)$ (vii) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$

(viii) $2e^{2x}(2x^2+4x+9)$ (ix) $\frac{1}{x}$ (x) $\frac{-5}{4x\sqrt{x}}$

(xi) $\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}}$ (xii) $-x^2\sin x+4x\cos x+2\sin x$

(xiii) $\frac{-b}{a^2}\operatorname{cosec}^3\theta$ (xiv) $\frac{-1}{2at^3}$ (xv) $\frac{2b}{a^2}\cot^3 t$.

2. (i) 0, 0 (ii) 24, 0 (iii) $125\,e^{5x}$, $625\,e^{5x}$

(iv) $-8\cos 2x$, $16\sin 2x$.

ಅಭ್ಯಾಸ 6

I. (1) $\frac{1}{3}$ (2) 1, 2

II. (1) ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $=\frac{1}{4}$ (2) ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $=-\frac{9}{4}$, ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $=-\frac{61}{27}$

(3) ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $=\frac{79}{9}$, ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $=-\frac{3}{4}$ (4) ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $=-5$,

ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $=-\frac{139}{27}$

(5) ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳು $=0, 2$, ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $=-\frac{9}{8}$

(6) ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= \frac{-17+5\sqrt{5}}{2}$. ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= \frac{-17-5\sqrt{5}}{2}$

(7) $\theta = 0$ ಮತ್ತು $b > a$ ಆದರೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= a$

$\theta = 0$ ಮತ್ತು $b < a$ ಆದರೆ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= a$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ ಮತ್ತು $b > a$ ಆದರೆ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= b$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ ಮತ್ತು $b < a$ ಆದರೆ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= b$

(8) ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= -\sqrt{13}$ (9) ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= 1$, ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= 9$

(10) ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $= \frac{-262 \pm 150\sqrt{3}}{13}$

III. (1) (*a*) $P = 9x - 100 - 0{\cdot}01x^2$, (*b*) 450 ಉತ್ಪನ್ನಗಳು. ಗರಿಷ್ಠ ಲಾಭ = ರೂ. 1,925

(2) 1200 ಉತ್ಪನ್ನಗಳು. ಗರಿಷ್ಠ ಲಾಭ = ರೂ. 1,420

(3) ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ $= a^2$ ('*a*' ಧನಸಂಖ್ಯೆ) ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಕನಿಷ್ಠವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ. ಆಯದ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳೂ '*a*' ಗೆ ಸಮನಾಗಿರಬೇಕು.

(4) ಎಲ್ಲಾ ಭುಜಗಳೂ $\frac{16}{3}$ ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದಾಗ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಗರಿಷ್ಠವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(5) ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ 10° ಆಗಿರಬೇಕು. (6) 10 ಮತ್ತು -10

(7) ಉದ್ದ = ಅಗಲ = 6″

ಅಭ್ಯಾಸ 7 (ಅ)

(1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\sqrt{3} - 2$ (3) $\frac{b}{a} \operatorname{cosec} \theta$ (4) -4.

ಅಭ್ಯಾಸ 7 (ಆ)

1. (*a*) $\frac{1}{2} + \log 2$ (*b*) 10 (*c*) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. (*a*) $4t + 3$ ಮಾನಗಳು/ಸೆಕೆಂಡ್ 4 ಮಾನಗಳು/ಸೆಕೆಂಡ್^{2}

(*b*) $-\frac{2}{t^3}$ ಮಾನಗಳು/ಸೆಕೆಂಡ್^{2}

3. $(2\cos t - 3\sin t)$ ಮಾನಗಳು/ಸೆಕೆಂಡ್ $-(2\sin t + 3\cos t)$ ಮಾನಗಳು/ಸೆಕೆಂಡ್^{2}

4. 1 ಮಾನ/ಸೆಕೆಂಡ್, $(18t + 4)$ ಮಾನಗಳು/ಸೆಕೆಂಡ್^{2}

5. 276 ಮಾನಗಳು/ಸೆಕೆಂಡ್ 400 ಮಾನಗಳು/ಸೆಕೆಂಡ್^{2}

6. $86 \cdot 15$ ಕಿ. ಮೀ./ಗಂಟೆ 7. 30π ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ./ಸೆಕೆಂಡ್

8. $6 \cdot 55$ ಸೆಂ.ಮೀ /ಸೆಕೆಂಡ್ 9. $8\sqrt{3}$ ಚ. ಸೆಂ.ಮೀ./ಸೆಕೆಂಡ್

10. 10 ಚ. ಅಂಗುಲ/ಸೆಕೆಂಡ್ 11. $\frac{8}{\pi}$ ಅಡಿಗಳು/ನಿಮಿಷ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8

(1) $\frac{x^9}{9}$ (2) $-\frac{1}{3}\cos 3x$ (3) $-\frac{1}{2x^2}$ (4) $\frac{2\sqrt{x^5}}{5}$

(5) $\frac{(2x+1)^4}{8}$ (6) $-\frac{1}{6x^6}$

(7) $\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x$ (8) $8\sqrt[8]{x} - \frac{7}{15}\sqrt[7]{x^{15}} + 2x$

(9) $2\sqrt{x} - 3\cos x + 2\sin x$ (10) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \log x$

(11) $\frac{x^2}{2} - 3\operatorname{cosec} x$ (12) $\frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$

(13) $\frac{3}{10}\sqrt[3]{x^{10}} + \frac{9}{7}\sqrt[3]{x^7} + \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4} + 3\sqrt[3]{x}$

(14) $\frac{9x^2}{2} + 54x + 36\log x - \frac{8}{x}$ (15) $4\tan x - 5\cot x + 3x$

(16) $\sec 3x + \frac{x^3}{3} - \log x + 5x$

ಅಭ್ಯಾಸ 9

(1) $\frac{\tan^4 x}{4}$ (2) $-\frac{\cos^4 x}{4}$ (3) $\frac{\sin^3 x}{3}$

(4) $\tan x - x$ (5) $-(\cot x + x)$

(6) $-\frac{\sin^5 x\cos x}{6} - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x - \frac{5}{16}\sin x\cos x + \frac{5}{16}x$

(7) $\frac{\cos^6 x . \sin x}{6} + \frac{5}{24} \cos^3 x . \sin x + \frac{5}{16} \cos x . \sin x + \frac{5}{16}$

(8) $\frac{1}{5} \tan^5 x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x - x$

(9) $-\frac{1}{5} \cot^5 x + \frac{1}{3} \cot^3 x - \cot x - x$

(10) $-\frac{1}{3} \cot^3 x + \cot x + x$

(11) $\tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x$ (12) $-\cot x - \frac{1}{3} \cot^3 x$

(13) $\frac{1}{4} (2x + \sin 2x)$

(14) $\frac{1}{32} [12 x - 8 \sin 2x + \sin 4x]$

(15) $\frac{1}{32} [12 x + 8 \sin 2x + \sin 4x]$

(16) $-\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \cos^3 3x$ (17) $\frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{9} \sin^3 3x$

(18) $\tan^2 \frac{1}{2} x - 2 \log \sec \frac{1}{2} x$ (19) $-\frac{1}{2} \cot^2 x - \log \sin x$

(20) $3 \tan \frac{1}{3} x$ (21) $-\frac{2}{a} \cot \left(\frac{a}{2}\right) x$ (22) $\frac{1}{3} \tan 3x - x$

(23) $-2 \cot \frac{1}{2} x - x$ (24) $-\frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{cosec}^3 x}$ (25) $\frac{2}{7} \sqrt{\tan^7 x}$

(26) $-\frac{\cot^4 x}{4}$ (27) $2 \sec \frac{1}{2} x$ (28) $\frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{2} \cos 2x$

(29) $-\frac{1}{2} \operatorname{cosec} 2x$ (30) $-\log (1 + \cos x)$ (31) $-\log (1 - \sin x)$

(32) $2 \log (1 + \sec \frac{1}{2} x)$ (33) $-\frac{1}{2} \tan^{-1} (\operatorname{cosec} 2x)$

(34) $\frac{2}{3} \sqrt{1 + \tan 3x}$

(35) $2 \sqrt{1 - \operatorname{cosec} x}$ (36) $4 \sqrt{1 + \sin \frac{1}{2} x}$ (37) $\frac{1}{2} \log (1 + \tan 2x$

(38) $-4 e^{\cot \frac{1}{4} x}$ (39) $e^{\tan x}$ (40) $-\frac{1}{28} (\cos 14x + 7 \cos 2x)$

(41) $\frac{1}{10} (\sin 5x + 5 \sin x)$ (42) $\frac{1}{10} (5 \cos x - \cos 5x)$

(43) $\frac{1}{56} (2 \sin 14x + 7 \sin 4x)$ (44) $\frac{1}{12} (3 \sin 2x - \sin 6x)$

(45) $\frac{1}{16}(4 \sin 2x - \sin 8x)$ (46) $\frac{1}{6} \log (1 + 3 \sin^2 x)$

(47) $\frac{1}{4} \log (1 + 2 \tan^2 x)$

(48) $\frac{1}{3} \log (3x + 2)$ (49) $\frac{1}{2} \log (2x - 3)$

(50) $2x^2 - x + \frac{1}{2} \log (4x - 1)$

(51) $\frac{1}{6(a^6 - x^6)}$ (52) $-\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{3/2}$ (53) $\frac{1}{15}(x^3 + 1)^5$

(54) $-\frac{1}{6(x^3 - 1)^2}$ (55) $\frac{1}{16} \log (3 + 2x^8)$ (56) $\frac{1}{3} e^{x^3}$;

(57) $\frac{1}{5} e^{5x-8}$ (58) $\frac{1}{4} e^{4x-2}$ (59) $2e^{\sqrt{x}}$ (60) $\log (e^x + 1)$

(61) $-\frac{1}{6} \log (1 - 3e^{2x})$ (62) $\log (e^x + e^{-x})$

(63) $\sin^{-1} \frac{x}{2}$ (64) $\frac{1}{3} \sec^{-1} \frac{x}{3}$

(65) $\frac{1}{2} \tan^{-1} 2x$ (66) $\frac{1}{4} \tan^{-1} \frac{x^2}{2}$ (67) $\frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

(68) $\frac{1}{2} \log (x^2 + 2x + 3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

(69) $\frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

(70) $\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x-3}{2}\right)$ (71) $\tan^{-1} (x + 2)$

(72) $\frac{1}{18} \log (9x^2 + 12x + 5) - 4 \tan^{-1} (3x + 2)$

(73) $\sin^{-1} \left(\frac{x-2}{3}\right)$ (74) $\sin^{-1} \left(\frac{x-2}{2}\right)$

(75) $\sin^{-1} \left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right)$ (76) $\sin^{-1} \left(\frac{x+1}{2}\right)$

(77) $\log (16x^2 - 8x + 5)$ (78) $\frac{1}{6} \sec^{-1} \left(\frac{2x+3}{3}\right)$

(79) $\frac{1}{4}\sec^{-1}\left(\frac{x+5}{4}\right)$

(80) $-\frac{1}{3}\left(\cos^{-1}\frac{x}{a}\right)^3$ (81) $\frac{1}{2}(\tan^{-1}x)^2$ (82) $-\frac{1}{2}(\operatorname{cosec}^{-1}x)^2$.

ଅଧ୍ୟାୟ 10 (ଇ)

(1) $2[x+\log(x-2)]$ (2) $-\left[\frac{x^2}{2}+3x+\log(x-3)\right]$

(3) $\frac{1}{1875}[125x^3+75x^2+60x+24\log(5x-2)]$

(4) $x+2\log(x-1)$

(5) $\log(x^2-8x+16)-\frac{11}{(x-4)}$

(6) $\frac{1}{8}\log\left[\frac{(2x-1)^7}{2x-1}\right]$ (7) $\log\left(\frac{x-1}{x}\right)$

(8) $\frac{x^2}{2}-\frac{5x}{2}+\frac{1}{14}\left[106\log(x+3)+\frac{5}{2}\log(2x-1)\right]$

(9) $\frac{1}{11}\log\left(\frac{3x-1}{2x+3}\right)$

(10) $\frac{1}{25}\left[\frac{7}{3}\log(3x-4)-\frac{1}{4}\log(4x+3)\right]$

(11) $\log\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ (12) $\frac{1}{36}\{2x+64\log(3x-2)-45\log(2x-1)\}$

ଅଧ୍ୟାୟ 10 (ଈ)

(1) $(x\sin x+\cos x)$ (2) $\frac{1}{8}(-2x\cos 2x+\sin 2x)$

(3) $\frac{1}{3}x^2\sin 3x+\frac{2}{27}[3x\cos 3x-\sin 3x]$

(4) $\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}(2x\cos 2x-\sin 2x)$ (5) $x\tan x-\log\sec x$

(6) $-\frac{1}{3}x\cot 3x+\frac{1}{9}\log\sin 3x$ (7) $x\tan x-\log\sec x-\frac{x^2}{2}$

(8) $-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x$

(9) $-x \cot x + \log \sin x - \dfrac{x^2}{2}$

(10) $\frac{1}{8}(-2x^2 \cos 2x + 2x \sin 2x + \cos 2x)$

(11) $\frac{1}{8}(2x^2 - 2x \sin 2x - \cos 2x)$

(12) $\frac{1}{8}(2x^2 + 2x \sin 2x + \cos 2x)$

(13) $-\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \dfrac{2}{27}[3x \sin 3x + \cos 3x]$

(14) $\frac{1}{4}(-2x^2 \cos 2x + 2x \sin 2x + \cos 2x)$ (15) $\frac{1}{4}x^2(2 \log x - 1)$

(16) $\left(\dfrac{x^3}{3} + 3x\right) \log x - \left(\dfrac{x^3}{9} + 3x\right)$ (17) $\dfrac{x^3}{9}(3 \log x - 1)$

(18) $\dfrac{e^{2x}}{4}(2x^2 - 2x + 1)$ (19) $2e^{1/2\,x}(x - 2e^{1/2\,x})$

(20) $x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2)$

(21) $x \cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2}$ (22) $x \sec^{-1} x - \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$

(23) $\frac{1}{2}(x^2 \cot^{-1} x + x + \cot^{-1} x)$ (24) $\frac{1}{2}(x^2 \sec^{-1} x - \sqrt{x^2 - 1})$

(25) $\frac{1}{2}[x^2 \operatorname{cosec}^{-1} x + \sqrt{x^2 - 1}] + c$

(26) $\frac{1}{4}\left[(x^4 - 12x) \tan^{-1} x + \dfrac{x^3}{3} + 4x - \tan^{-1} x - 6 \log(1 + x^2)\right]$

ಅಭ್ಯಾಸ 11

(1) 26 (2) $\frac{7}{6}$ (3) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (4) $\frac{2}{9}(5^{3/2} - 2^{3/2})$ (5) $\dfrac{52}{9}$ (6) $\frac{2}{3}(\sqrt{5} - 1)$

(7) $\frac{3}{5} \tan^{-1}(\frac{1}{3}) - \frac{2}{5} \tan^{-1}(\frac{1}{2})$ (8) $\dfrac{(\log 2)^2}{2}$ (9) $\dfrac{2}{3\sqrt[4]{3}} - \dfrac{2}{7 . \sqrt[4]{128}}$

(10) $\log 2$ (11) $\frac{1}{6}$ (12) $\sqrt{3}$ (13) $-2\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}} - 1\right)$ (14) $\dfrac{\pi^2}{16}$

(15) $\dfrac{\pi^2}{16}$ (16) $\frac{1}{4}(\pi - 2)$ (17) $\frac{\pi}{4}$ (18) 1 (19) $\frac{4}{3}$

(20) $\frac{1}{12}(3\pi - 8)$ (21) $\frac{1}{2}(1 + e^{\pi/2})$ (22) $e - e^{1/\sqrt{2}}$

(23) $\pi\sqrt{3} - \frac{\pi^2}{18} - \log^2$ (24) $\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

(25) $\frac{1}{\sqrt{7}}\log\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$ (26) $\frac{1}{\sqrt{21}}\log\left(\frac{17+3\sqrt{21}}{10}\right)$

(27) $\frac{2}{\sqrt{11}}\left(\tan^{-1}\frac{13}{\sqrt{11}} - \tan^{-1}\frac{4}{\sqrt{11}}\right)$ (28) $\frac{1}{\sqrt{7}}\log\left(\frac{\sqrt{7}-4}{3}\right)$

ಅಭ್ಯಾಸ 12

(1) $6 + \log 2$ (2) 52/3 (3) 9/32 (4) 5 (5) 1/2 (6) $1 - \sqrt{2}$
(7) $1/2 \log 2$ (8) $1/4(4 - \pi)$ (9) 9/4 (10) 1/54 (11) − 1/18
(12) − 1/6 (13) − 125/54 (14) − 343/216 (15) − 1/6 (16) 16/3
(17) 343/54 (18) $\frac{16}{2}a^2$ (19) 4/3 (20) 1/4.

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ

ಕನ್ನಡ– ಇಂಗ್ಲಿಷ್

ಅ

ಅಕ್ಷ	Axis
ಅಖಂಡ ಅನುಪಾತ	Continued proportion
ಅಖಂಡ ಪ್ರಮಾಣ	Continued Ratio
ಅನಿಶ್ಚಿತ	Indeterminate
ಅನುಕಲ್ಯ	Integrand
ಅನುಕಲನಾಂಕ	Integral
ಅನುಕಲನಕ್ರಿಯೆ	Integration
ಅನುಗುಣ	Corresponding
ಅನುಪಾತ	Proportion
ಅನುಪೂರಕ	Supplementary
ಅನುಮಿತ	Corollary
ಅನುಲೋಮ	Reciprocal
ಅಪರಿಮೇಯ	Irrational
ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ	Factorisation
ಅಪ್ರದಕ್ಷಿಣ	Anti-clockwise
ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು	Opposite side
ಅವಕಾಶ	Interval
ಅವನತ ಕೋನ	Angle of depression
ಅವಲಂಬಿತ ಚರ	Dependent variable
ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ	Continuity
ಅವ್ಯಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನ	Implicit function
ಅಸಮ ಪ್ರಮಾಣ	Unequal ratio
ಅಸಂಗತ ಪ್ರದರ್ಶನ	Reductio-ad-absurdum

ಆ

ಆದೇಶಕ್ರಮ	Method of substitution
ಆದ್ಯಂತಾನುಪಾತಿಗಳು	Extreme proportions
ಆವರ್ತ ಕಾಲ	Period

ಉ

ಉತ್ಪನ್ನ	Function
ಉನ್ನತ ಕೋನ	Angle of elevation

ಋ

ಋಣ, ಋಣಾತ್ಮಕ	Negative

ಏ

ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರ	Single variable

ಐ

ಐಕ್ಯ	Coincide
ಐದು ಶ್ರೇಣಿಯ ತತ್ವ	Five step rule

ಓ

ಓಟ	Slope
ಓರೆ	Slant

ಅಂ

ಅಂತರ	Difference
ಅಂತಃಖಂಡ	Intercept
ಅಂಶ	Numerator

ಕ

ಕರ್ಣ	Hypotenuse
ಕನಿಷ್ಠ	Minimum
ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ	Calculus
ಕೋಟಿ	Abscissa
ಕ್ರಮಾಗತ	Successive
ಕ್ಷಿತಿಜ	Horizontal
ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ	Area

ಖ

ಖಂಡಗಳು	Segments

ಗ

ಗರಿಷ್ಠ	Maximum
ಗಹನ	Abstract
ಗುಣಾಂಕ	Coefficient
ಗೋಳಾಕೃತಿ	Sphere

ಚ

ಚತುರ್ಥಭಾಗ	Quadrant
ಚತುರ್ಭುಜ	Quadrilateral
ಚತುರ್ಥಾನುಪಾತ	Fourth Proportional
ಚರ	Variable
ಚಿಹ್ನೆ	Sign

ಛ

ಛೇದ	Denominator
ಛೇದಕ	Secant

ಜ

ಜನಕ ರೇಖೆ	Generator
ಜ್ಯಾ	Chord
ಜ್ಯಾಮಿತಿ	Geometry

ತ

ತ್ರಿಜ್ಯ	Radius
ತ್ರಿಭುಜ	Triangle
ತೃತೀಯಾನುಪಾತ	Third Proportional

ದ

ದ್ವಿಘಾತಿಸು	Square

ಧ

ಧನ, ಧನಾತ್ಮಕ	Positive

ನ

ನಕ್ಷೆ	Graph
ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅನುಕಲನಾಂಕ	Definite integral
ನಿರ್ದೇಶಕಗಳು	Co-ordinates
ನಿಯತಾಂಕ, ನಿಯತಪದ	Constant
ನಿಷ್ಪನ್ನ	Derivative
ನಿಷ್ಪತ್ತಿ	Incrementary ratio

ಪ

ಪರಮಮಿತಿ	Limit
ಪರಿಮಾಣ	Quantity
ಪರಿಮೇಯ	Rational
ಪರಿಮೇಯಕಾರಕ ಅಪವರ್ತನಗಳು	Rationalising factors
ಪೂರ್ಣವರ್ಗ	Perfect square
ಪೂರ್ಣಾಂಕ	Integer
ಪೂರಕ ಕೋನ	Complementary angle
ಪ್ರದಕ್ಷಿಣ	Clockwise
ಪ್ರಮಾಣ	Ratio
ಪ್ರವಣತೆ	Inclination

ಬ

ಬಹುಪದಿ	Polynomial
ಬಾಗುವಿಕೆ	Inclination
ಬಾಹು	Side
ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ	Analytical geometry

ಭ

ಭಾಗಲಬ್ಧ	Quotient
ಭಾಗಶಃ	Partial
ಭಿನ್ನಕಲನಕ್ರಿಯೆ	Differentiation
ಭಿನ್ನಕಲನಾಂಕ	Derivative
ಭಿನ್ನರಾಶಿ	Fraction
ಭುಜ	Ordinate, side

ಮ

ಮಧ್ಯಾನುಪಾತ	Mean proportional
ಮೂಲಬಿಂದು	Origin
ಮೂಲತತ್ವಗಳು	First principles
ಮೇರೆ	Boundary
ಮೇರೆಗೊತ್ತಾದ	Defined

ರ

ರೇಖಾಗಣಿತ	Geometry
ರೇಖಾಚಿತ್ರ	Graph

ಲ

ಲಘುಕೋನ	Acute angle
ಲಂಬ	Perpendicular
ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ	Right angled triangle

ವ

ವರ್ಗಪೂರಣ	Squaring
ವರ್ಗಮೂಲ	Square root
ವರ್ತುಲೀಯ	Circular
ವಾಸ್ತವ	Real
ವಿಕರಣ	Rationalise
ವಿಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು	Rationalising factors
ವಿಚ್ಛಿನ್ನ ಭಾಗ	Intercept
ವಿಪರ್ಯಯ	Reciprocal
ವಿಲೋಮ ಉತ್ಪನ್ನ	Inverse function

ವಿಲೋಮ ಪ್ರಮೇಯ	Converse theorem
ವಿಸ್ತೀರ್ಣ	Area
ವೇಗ	Velocity
ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ	Acceleration
ವೃದ್ಧಿ	Increment
ವೃತ್ತ	Circle
ವೃತ್ತಖಂಡ	Arc
ವ್ಯಕ್ತ ಉತ್ಪನ್ನ	Explicit function
ವ್ಯಾಖ್ಯೆ	Definition
ವ್ಯಾಸ	Diameter
ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ	Reciprocal
ಶ	
ಶೃಂಗ, ಶೃಂಗಬಿಂದು	Vertex
ಸ	
ಸಜಾತೀಯ	Same kind
ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ	Right angled triangle
ಸಮತಲ	Plane
ಸಮಪ್ರಮಾಣ	Equal ratio
ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳು	Similar triangles
ಸಮಾನಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು	Equilateral triangle
ಸಮಾನಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ	Parallelogram
ಸಮೀಕರಣ	Equation
ಸರಪಳಿ ತತ್ತ್ವ	Chain rule
ಸಹಗಾಮಿ	Corresponding
ಸುತ್ತಳತೆ	Perimeter
ಸೂಚಕಗಳು	Co-ordinates
ಸಂಜ್ಞಾಸೂತ್ರ	Formula
ಸಂಪೂರಕ	Supplementary
ಸಂವೃತ್ತ ಬಿಂದುಗಳು	Concyclic
ಸ್ಥಿರ	Constant
ಸ್ಥಿರರಾಶಿ	Parameter
ಸ್ಥಿರರಾಶೀಯ ಉತ್ಪನ್ನ	Parametric function
ಸ್ಪರ್ಶಕ, ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆ	Tangent
ಸ್ವತಂತ್ರಚರ	Independent variable

ಆಧಾರಗ್ರಂಥಗಳ ಪಟ್ಟಿ

1. DESHAPANDE, S. P., M.SC.; *Mathematics for Polytechnic Students.* Poona: A. V. G. Prakashan, 1966.

2. JAMBUNATHAN, M. V., *Pre-University Geometry.* Mysore : M. I. S. Ram, 1966.

3. LONEY, S. L., M.A.; *The Elements of Co-ordinate Geometry.* London-Bombay-Calcutta-Madras: Macmillan and Company Limited, 1960.

4. MORREY. H. PROTTER AND CHARLES. B. MORREY, *Calculus for College Students.* New York : Addison-Wesley Publishing Co., 1967.

5. PAVATE, D. C., M.A. (CANTAB); *Modern College Calculus.* London–Bombay–Calcutta–Madras : Macmillan and Co., Ltd., 1965.

6. *A Manual in Mathematics, Volumes I and II.* Bangalore : Department of Mathematics, University of Agricultural Sciences, 1971.

7. *Pre-University Mathematics, Part I and Part II.* Bangalore University Publication, 1968.

8. ತಿಮ್ಮೂರ, ಕೆ. ಎಸ್., ಮಲಘಾಣ, ಎಸ್. ಆರ್., ಗೋಖಲೆ, ಎಸ್. ಬಿ., ಮತ್ತು ಅಯ್ಯಂಗಾರ್, ಎಸ್. ವಿ. ಎಸ್., **ಬೀಜಗಣಿತ–ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ.** ಧಾರವಾಡ : ಕರ್ನಾಟಕ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, 1969.

9. ಮಂಜುನಾಥಯ್ಯ, ಕೆ. ಎಸ್. ; **ಬೀಜರೇಖಾಗಣಿತ.** ಮೈಸೂರು : ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, 1957.

10. ಸೂರ್ಯನಾರಾಯಣಶಾಸ್ತ್ರಿ, ಎಂ.ಎಸ್ಸಿ., **ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ :** ಮೈಸೂರು : ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, 1961.

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಪ್ರಕಟಣೆಗಳು

			ರೂ. ಪೈ.
1.	ಸುಭಿಕ್ಷತೆಗೆ ತೆರೆದ ಬಾಗಿಲು	(ಪ್ರತಿಗಳು ತೀರಿವೆ)	1–50
2.	ಪೀಡೆ ನಿರ್ವಹಣೆ	(,,)	3–75
3.	ಕೀಟ ವಿಂಗಡಣೆ		12–00
4.	ಕೀಟ ಪಶೋಟಿ	(ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	10–00
5.	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ—ಭಾಗ 1		5–00
6.	ತರಕಾರಿ ಬೇಸಾಯ	(ಪ್ರತಿಗಳು ತೀರಿವೆ)	10–00
7.	ಕೃಷಿ ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ಶಬ್ದಾರ್ಥ ನಿರೂಪಣಾವಳಿ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	3–75
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	5–00
8.	ಮಣ್ಣು ಮತ್ತು ನೀರು ಸಂರಕ್ಷಣಾ ಕೈಪಿಡಿ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	12–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	15–00
9.	ರೈತರ ನೆಚ್ಚುಮೆಚ್ಚಿನ ಮರಗಳು	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	12–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	15–00
10.	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ—ಭಾಗ 2	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	9–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	12–00
11.	ಮೈಸೂರು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ	(ಪ್ರತಿಗಳು ತೀರಿವೆ)	10–00
12.	ಮಣ್ಣು ಮತ್ತು ನೀರು ನಿರ್ವಹಣೆ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	12–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	15–00
13.	ಮಣ್ಣು	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	9–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	12–00
14.	ಕೃಷಿ ಸಹಕಾರ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	5–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	8–00
15.	ಕಳೆಗಳು ಮತ್ತು ಕಳೆಗಳ ನಿಯಂತ್ರಣ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	12–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	15–00
16.	ಗೋಸಂಪತ್ತು	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	5–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	8–00
17.	ಧಾನ್ಯದಾಸ್ತಾನು ತತ್ವ ಮತ್ತು ಪದ್ಧತಿಗಳು	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	6–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	9–00
18.	ಮಣ್ಣಿನ ಫಲವತ್ತತೆ ಹಾಗೂ ಉತ್ಪಾದಕತೆ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	14–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	17–00

19.	ಪಶುವೈದ್ಯಕೀಯ ವಿಜ್ಞಾನ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	6–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	9–00
20.	ಹೊಲದ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೆಲವು ಕೀಟಗಳು	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	6–50
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	9–50
21.	ಟ್ರ್ಯಾಕ್ಟರುಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳನ್ನು	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	6–00
	ಸುಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿಡುವ ಕ್ರಮಗಳು	(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	10–00
22.	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ—ಭಾಗ 3	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	8–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	12–00
23.	ಕೃಷಿ ವಿಸ್ತರಣ ಶಿಕ್ಷಣ ಪದ್ಧತಿಗಳು	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	9–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	13–00
24.	ಕಣಜದ ಪೀಡೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	12–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	15–00
25.	ಸಸ್ಯವರ್ಗೀಕರಣ ಶಾಸ್ತ್ರ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	12–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	16–00
26.	ಪೌಷ್ಟಿಕ ಆಹಾರ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	7–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	11–00
27.	ಕಡಲ ಮೀನುಗಾರಿಕೆ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	4–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	8–00
28.	ಧಾನ್ಯದ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		8–50
29.	ಕಬ್ಬಿನ ಬೆಳೆಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		3–50
30.	ಶಿಶುವಿಹಾರ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	7–50
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	10–50
31.	ಬೇಳೆಕಾಳು ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ		
		ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	6–00
32.	ಕೃಷಿ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	7–50
	ಸಮೀಕ್ಷಣೆ	(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	11–00
33.	ಇಲಿಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ನಿಯಂತ್ರಣ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	7–50
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	11–50
34.	ತರಕಾರಿ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		10–00
35.	ಹಣ್ಣಿನ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ		
		ಹತೋಟಿ	13–00

			ರೂ. ಪೈ.
36.	'ಕ್ಯಾನಿಂಗ್' ಆಹಾರ ಜೋಪಾಸನೆಯ ಒಂದು ಆಧುನಿಕವಿಧಾನ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	13–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	17–00
37.	ಅಲಂಕಾರ ಸಸ್ಯಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		8-50
38.	ಜೀವಕೋಶ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಜೀವ ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	16–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	20–00
39.	ಎಲುಬು ಶಾಸ್ತ್ರ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	9–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	13–00
40.	ಕಡಲೆಕಾಯಿ (ಶೇಂಗಾ)	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	8–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	12–00
41.	ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ ಭಾಗ–1	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	20–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	24–00
42.	ತೆಂಗು, ಅಡಿಕೆ ಇತರ ಗರಿಮರಗಳ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		7–00
43.	ಪ್ಲಾಂಟೇಶನ್ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		9–50
44.	ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಕೋಳಿಸಾಕಣೆ	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	18–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	22–00
45.	ಎಣ್ಣೆಬೀಜ (ಕಾಳು) ಗಳ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		6–00
46.	ಕಲ್ಲುನಾರು (ಭೂತಾಳೆ) ಗಿಡಗಳು	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	4–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	8–00
47.	ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ ಭಾಗ—2	(ಸಾದಾ ಪ್ರತಿ)	16–00
		(ಕ್ಯಾಲಿಕೊ ಪ್ರತಿ)	20–00
48.	ಸಸ್ಯ ಸಾಮ್ರಾಜ್ಯ	(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)	
49.	ಮೂಲ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ	(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)	
50.	ಜೇನುಸಾಕಣೆ	(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)	
51.	ಭಾರತೀಯ ಗ್ರಾಮೀಣ ಯುವಕ ರೈತ ಸಂಘಗಳ ಸಂಘಟಣೆ	(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)	

52. ಹತ್ತಿ (ನೂಲು) ಹಾಗೂ ನಾರಿನ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ
ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
53. ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಜೇನುಸಾಕಣೆ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
54. ಪಶುರೋಗಗಳು ಮತ್ತು ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಆರೋಗ್ಯ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
55. ತರಕಾರಿ ಬೆಳೆಗಳ ಕೀಟ ನಿಯಂತ್ರಣ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
56. ಮೀನುಗಾರಿಕೆ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
57. ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಭ್ರೂಣಶಾಸ್ತ್ರ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
58. ಸಾವಯವ ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
59. ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯಂ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
60. ಕೃಷಿ ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
61. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
62. ಹಸುರೆಲೆ ಗೊಬ್ಬರ, ಮೇವು ಹಾಗೂ ಉಪ್ಪುನೀರಳೆ
ಬೆಳೆಗಳ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
63. ಮಾದಕ (ಹೊಗೆಸೊಪ್ಪು, ಗಾಂಜ) ಹಾಗೂ ಸಾಂಬಾರ
(ಅರಿಶಿನ ಇತ್ಯಾದಿ) ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು
ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
64. ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ
ಹತೋಟಿ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
65. ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಮೂಲದ ಸೋಂಕುರೋಗಗಳು (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
66. ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ರೂಪಕಗಳು (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
67. ಹುಲಿ—ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮೃಗ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
68. ಸಹಕಾರಿ ಬೇಸಾಯ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
69. ಜೀವಕೋಶ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
70. ಮಣ್ಣು ಶಿಲೀಂಧ್ರ ಕೈಪಿಡಿ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
71. ನೀರಾವರಿ ತತ್ವ ಹಾಗೂ ಪದ್ಧತಿಗಳು (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)